

① 可靠通讯网与可靠多总线结构间的关系

48-53

The Relations Between Reliable Communication Networks and Reliable Multi-Bus Structures

周六丁
Zhou Liuding

陈四清
Chen Siqing

(重庆大学电子信息工程学院)

TN913.2

摘要 讨论了可靠通讯网与可靠多总线结构间的关系。提出了以图论为工具对可靠通讯网进行逻辑设计,然后用多总线结构对其加以实现的方法。并给出了可靠通讯网的处理机容错度和对应的多总线结构处理机容错度间的关系。

关键词 容错;多总线结构;通讯网;体系结构;图论 可靠性^v
中国图书资料分类法分类号 TP 302.8

ABSTRACT The relations between reliable communication networks and reliable multi-bus structures are investigated in this paper. By means of the graph theory we can easily design a reliable network, which then can be made further with the help of a multi-bus structure.

KEYWORDS fault tolerance; multi-bus structure; communication network; system structure; graph theory

0 引 言

目前许多企业和科研机构对建立计算机通讯网提出了越来越多的需求。其中一个问题是如何建立一个高可靠性的通讯网,使之具有较强处理机容错能力。人们已认识到一个通讯网是否具有高可靠性,不仅由设备可靠性决定,也由处理机间的互连方式决定。如何利用图论设计一个高可靠性的通讯网并用多总线结构加以实现,以及两者间处理机容错能力间的关系是本文研究的内容。

图论作为一种直观且有力的工具,可用于可靠通讯网的逻辑设计。但这样设计出的逻辑结构难以付诸工程实现。另一方面,多总线互连结构具有造价低、易构造、易扩充等优点,因而它是一种较好的物理结构(这里的物理结构不是具体的实现结构)。但多总线互连结构失去了逻辑上(或概念级)上的明晰性。即,仅从多总线结构不易看出处理机间相互关系的全貌。因此,我们希望能利用这两者各自优点,用图论作为逻辑设计工具而用多总线结构作为物理实现途径。通过建立可靠通讯网和可靠多总线结构间处理机容错度的关系,能部分解决

• 收文日期 1992-12-10

该工作由国家自然科学基金资助

可靠通讯网的设计与实现的有关问题。这里需指出，尽管前人对容错多总线系统已做了大量工作^[1~3]，但尚未对可靠通讯网和可靠多总线结构间的关系进行研究。

1 可靠通讯网的逻辑设计

一个通讯网常可用一个无向图 $G(V, E)$ 表示，其中图顶点表示处理机，边表示两处理机相连关系。因而文中将交替使用通讯网和图 G 两术语，例如图 1 给出了一个通讯网 $G(V, E)$ ，其中 $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ ， $E = \{\{P_1, P_2\}, \{P_2, P_3\}, \{P_3, P_4\}, \{P_4, P_5\}, \{P_5, P_1\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_5\}\}$ 。

可靠通讯网是指具有处理机容错能力的通讯网。即当该网中有若干个处理机故障(或失效)时，余下的处理机仍构成一个连通可继续运行的子系统。为表征一个通讯网 G 的可靠性的 高低，引入通讯网 G 的可靠度(或处理机容错度) $R(G)$ 。 $R(G)$ 定义为这样的最大正整数 r ，使得通讯网 G 中至多有 r 个处理机故障时，余下的处理机仍构成一个连通的系统。

图论中曾讨论过图 G 的(点)连通度 $K(G)$ 的概念。一个图 G 的连通度 $K(G)$ 定义为这样一个最小正整数 α ，使得 G 中有一顶点子集 $V' \subseteq V$ 满足 $|V'| \leq \alpha$ 且 V' 是 G 的一个顶点割。显然可导出：

$$R(G) = K(G) - 1 \tag{1}$$

式(1)说明：只要构造出一个具有连通度为 $K(G)$ 的通讯网 G ，则 G 的可靠度 $R(G)$ 则为 $K(G) - 1$ 。

要构成一个连通度为 $K(G)$ 的图并不难，但常希望以最少代价(这里指边数)构成连通度为 $K(G)$ 的通讯网 G 。下面则是构造方法的描述。

设 $H_{m,n}$ 是 n 个顶点，连通度为 m 、且边数最少的图。对所有 $m, n, H_{m,n}$ 构成分三种情形^[4]。

(i) 当 m 是偶数时，令 $m = 2 \cdot r$ ， $H_{2r,n}$ 如下构成。 $H_{2r,n}$ 有标号 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 的顶点，顶点 i 与 j ($i \neq j$) 有边相连当且仅当 i, j 满足 $i - r \leq j \leq i + r$ (这里 $+$ 、 $-$ 指模 n 的加、减)。例如 $H_{4,8}$ 如图 2. a 所示。

(ii) 当 m 为奇数， n 为偶数时，令 $m = 2r + 1$ ，则 $H_{2r+1,n}$ 如下构成。首先构成 $H_{2r,n}$ ，然后对每个顶点 i ($1 \leq i \leq n/2$)，在 $H_{2r+1,n}$ 中增加一条从 i 到 $i + (n/2) \bmod n$ 的边。如图 2. b 中的 $H_{5,8}$ 。

(iii) 当 m 为奇数， n 为奇数时，令 $m = 2r + 1$ ， $H_{2r+1,n}$ 如下构成。首先构造 $H_{2r,n}$ ，然后将顶点 0 分别与顶点 $(n-1)/2$ 和 $(n+1)/2$ 相连，最后对每个顶点 i ($1 \leq i \leq (n-1)/2$) 增加一条从 i 到顶点 $i + (n+1)/2$ 的一条边。例如 $H_{5,9}$ 如图 2. c 所示。

因而，上述方法也说明了具有最小代价且可靠度为 $m - 1$ 的可靠通讯网的逻辑设计是简单易行的。

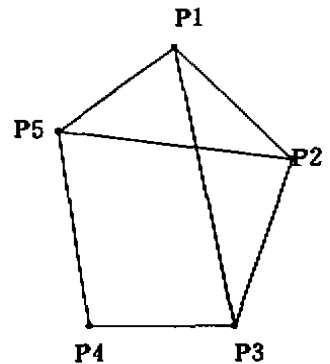


图 1 一个通讯网 $G(V, E)$

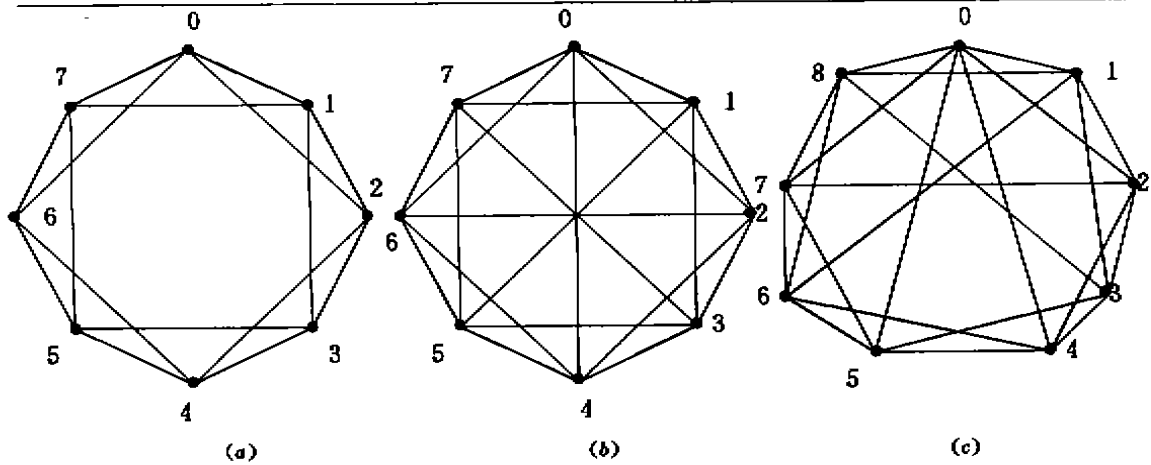


图 2 (a) $H_{4,8}$ (b) $H_{5,8}$ (c) $H_{6,8}$

2 可靠通讯网的多总线结构的实现

按上述方法设计出的可靠通讯网的逻辑结构十分清楚,处理机间的通讯关系明确,并且路由算法的设计比较简单,但却存在下述缺点。

(i) 通常计算机的 I/O 端口数很少,因而上述构成的通讯网难以实现,例如图 2 中的 $H_{4,8}$ 难以用仅有 3 个 I/O 端的计算机构成。

(ii) 当需要设计可靠度较高的通讯网时,通讯线路的需要量很大。例如,要构成一个具有 n 个处理机、可靠度为 $m-1$ 的通讯网,至少需要 $[m \cdot n/2]$ 条通讯线^[4]。

因而,我们希望将可靠通讯的逻辑结构转换为多总线结构,从而克服以上两方面的缺点。

在图论中曾讨论了图覆盖的概念^[5]。图覆盖问题研究的是用图 G 的某种类型的子图 $G_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 覆盖给定图 G 的边集,即 $\bigcup_{i=1}^r E(G_i) = E(G)$ 。例如 $H_{4,8}$ (图 3. a) 可用四个子图 (图 3. b) 覆盖。

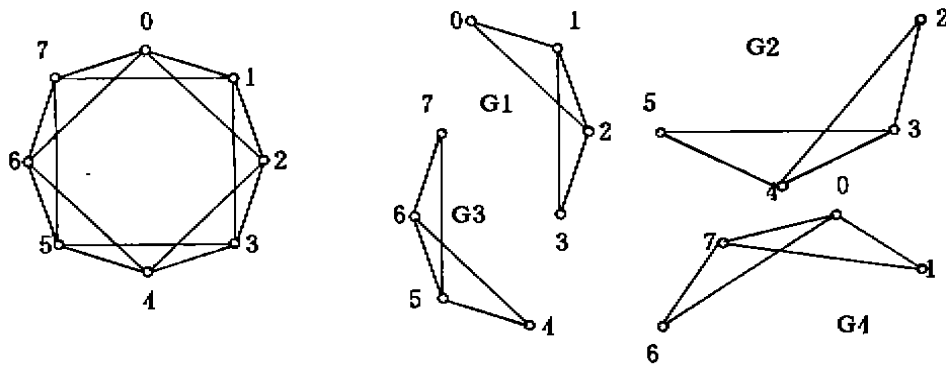


图 3 $H_{4,8}$ 及它的四个子图

另一方面, s 个处理机由一条总线相连,逻辑上等价于由 s 个处理机为顶点构成的全连接的通讯网。如图 4. a 的单总线结构逻辑上等价于图 4. b 的通讯图。

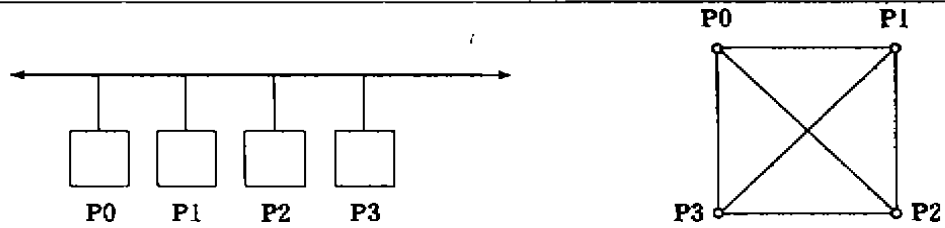


图4 单总线结构与全互连通讯图

为研究可靠通讯网的多总线结构的实现,需要将图覆盖的概念加以如下推广。

首先引入一个图的团覆盖的概念。所谓图 G 的团覆盖问题是研究用某些团 $G_i (i = 1, 2, \dots, r, G_i \text{ 的顶点集是 } G \text{ 的顶点子集})$ 去覆盖图 G 的所有边,即 $E(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^r E(G_i)$ 。当 G 有这样的一种团覆盖 (G_1, G_2, \dots, G_r) ,则 (G_1, G_2, \dots, G_r) 称为图 G 的一种团覆盖,并且当 G_1, G_2, \dots, G_r 都具有相同顶点个数时, (G_1, G_2, \dots, G_r) 称为图 G 的规整团覆盖。

现可给出由通讯网 G 构成实现 G 的多总线结构的方法。

- (i) 寻找 G 的一种团覆盖 (G_1, G_2, \dots, G_r) ;
- (ii) 设置 r 条总线 b_1, b_2, \dots, b_r ;
- (iii) 将 G_i 的所有顶点与 b_i 相连 $(1 \leq i \leq r)$ 。

例如图5给出了图 $H_{4,8}$ 的一种规整团覆盖 (G_1, G_2, G_3, G_4) ,而图6则给出了 $H_{4,8}$ 的一种多总线结构。

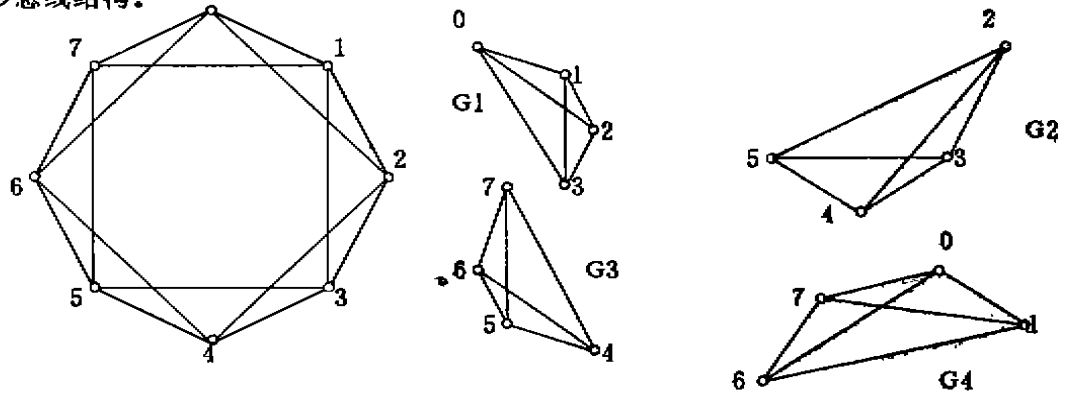


图5 $H_{4,8}$ 的一种团覆盖

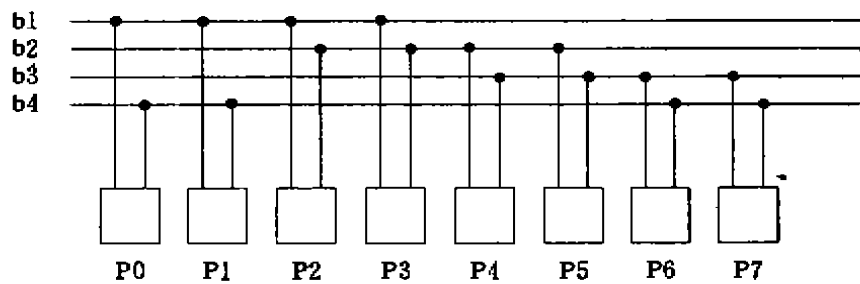


图6 $H_{4,8}$ 的多总线结构

为方便研究,把通讯网 G 的这种多总线结构记为 $BUS(G)$, 并给出几个定义。

定义 1: 如果一个系统(或为通讯网或为多总线结构)中两处理机 p_i, p_j 能够直接或间接(靠其它处理机转发信息)通讯,则称 p_i, p_j 可通达。

定义 2: 一多总线系统 S 的可靠度(这里特指处理机容错度)定义为这样的最大数 r ; 当 S 中至多有 r 个处理机故障时,余下处理机仍构成连通的系统(即能彼此通达)。

定义 3: r 个图 $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_r(V_r, E_r)$ 的并图定义为:

$$G(V, E) = \bigcup_{i=1}^r G_i(V_i, E_i)$$

即:

$$V = \bigcup_{i=1}^r V_i; \quad E = \bigcup_{i=1}^r E_i$$

在给出通讯网 G 和对应的多总线结构 $BUS(G)$ 的两个关系的一般描述前,考察图 5 中 $H_{4,3}$ 和图 6 中的多总线结构是有启示的。容易看出:(1)在 $H_{4,3}$ 中两处理机 p_i, p_j 能通达,则在 $H_{4,3}$ 对应的多总线结构 $BUS(H_{4,3})$ 中 p_i, p_j 能通达;(2) $H_{4,3}$ 的可靠度为 3, 则 $BUS(H_{4,3})$ 的可靠度也为 3。究其原因,是因为 $BUS(H_{4,3})$ 的通讯关系实质上等价于 $H_{4,3}$ 的团覆盖 (G_1, G_2, G_3, G_4) 的并图 $G^* = \bigcup_{i=1}^4 G_i$ 的通讯关系(G^* 见图 7)。又由于 $H_{4,3}$ 是 G^* 的生成子图,故在 $BUS(H_{4,3})$ 中保持了 $H_{4,3}$ 中的通讯关系及可靠度。由上述讨论,可以导出如下一般结论(形式证明略)。

3 结 论

令 G 是一个通讯网, $BUS(G)$ 是按上述方法构成的与 G 对应的多总线结构,则有:

- (i) G 中两处理机 p_i, p_j 能通达,则 $BUS(G)$ 中 p_i, p_j 也能通达;
- (ii) G 的可靠度为 m , 则 $BUS(G)$ 的可靠度至少为 m 。

下面进一步研究通讯网 G 的多总线结构的实现问题。

再考察图 5 与图 6 可看到:(1)图 $H_{4,3}$ 的团覆盖的势(即团的个数)对应于总线的条数;(2)团 $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的顶点个数等于第 i 条总线挂接的处理机个数;(3)图 $H_{4,3}$ 中顶点 j 在团覆盖中出现的次数等于多总线结构中处理机 j 挂接到总线的条数。这个观察仍可推广为一般情形。在工程实现时,一条总线可挂接的处理机数是有限的,并且每个处理机的 I/O 端口数也是有限的。因而在将可靠通讯网转换成可靠多总线结构时,应该考虑到这些工程限制。

假定每条总线可至多挂接的处理机个数为 c , 每个处理机的 I/O 端口数为 a 。对可靠通讯网 $H_{n,m}$ (即顶点数为 n , 可靠度为 $m-1$ 且具有最小代价的通讯网), 要将其转换为最小代价(总线数最少)的可靠多总线结构, 仅需寻找 $H_{n,m}$ 的满足下述约束条件的一种团覆盖 (G_1, G_2, \dots, G_r) 。即:

$$(1) E(H_{n,m}) \subseteq \bigcup_{i=1}^r E(G_i);$$

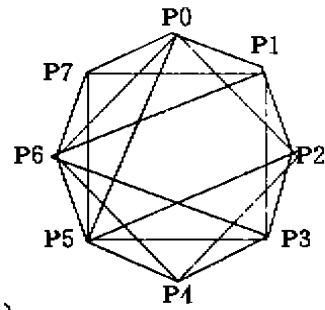


图 7 图 6 多总线结构等价的通讯关系图 G^*

(I) $|V(G_i)| \leq c (i = 1, 2, \dots, r)$;

(II) $H_{n,a}$ 中任一顶点至多在 a 个团中出现;

(N) 在满足以上三个条件下使 r 最小。

当找到了 $H_{n,a}$ 的满足以上四个条件的一种团覆盖后,用前述方法则直接可将这种团覆盖转换为满足工程限制、保持通讯关系和可靠度且实现代价最小的多总线结构。如果对于 $H_{n,a}$ 不存在满足以上四条件的团覆盖,则需重新构成可靠度略低的通讯网或者放松工程参数的限制。

如果再深入研究,可设计一种算法用以判定 $H_{n,a}$ 是否存在满足条件(I)、(II)、(III)的一种团覆盖,当存在时找出满足条件(N)的一种团覆盖。

参 考 文 献

- 1 D. K. Pradhan, et al., Fault-Tolerant Multibus Architectures for multiprocessors, 14-th Int. Conf. on Fault-Tolerant Computing, PP. 400~408, June, 1984
- 2 陈廷槐等. 超团连通性及容错多总线系统的设计, 中国科学(A辑), 1987, (12), 1309~1319
- 3 陈廷槐等. 容错多总线系统的可靠性分析. 电子学报, 1988, (2), 1~7
- 4 J. A. Bondy and U. S. Murty; Graph Theory with Applications, the Macmillan Press LTD, 1976
- 5 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论, 科学出版社, 1987