

8) 46-51

实一般阵双特征矢量同步解法及其 在参数敏感性分析中的应用

A Synchro-Solution Method for Generalized Eigenproblem and
its Application in Parameter Sensitivity Analysis

黄文振
Huang Wenzhen

0151.21

(重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆, 630044)

A

摘 要 提出了一种实一般阵广义特征值问题双特征矢量的高效同步算法, 并将其应用于高阶非自耦振动系统如转子-油膜轴承系统振动的参数敏感性分析。

关键词 特征值问题; 特征函数; 振动分析方法; 汽轮机油膜振荡

中国图书资料分类法分类号 O 175. 9; TH113. 25; TK263. 61

实矩阵 参数
高效同步算法

ABSTRACT A high efficient synchro-solution method for generalized eigenproblem has been proposed, it has also been demonstrated that how the method can be used in vibration parameter sensitivity analysis of the higher order non-self-adjoint vibration system such as rotor-journal bearing system.

KEYWORDS eigenvalue and eigenfunction problem; vibration analysis method; steam turbine oil whip vibration

0 引 言

工程中存在一类非自耦振动系统, 这类系统通常由于存在复杂的流-固耦合振动效应而失去一般弹性工程结构的自耦特性。典型实例如考虑轴承油膜、密封、叶隙处流体耦合特性的高速工业透平机转子-轴承系统。这类系统的振动分析较工程中常见的自耦弹性系统困难得多^[5]。

为分析参数对系统振动特性的影响, 近年来以矩阵摄动技术为基础的参数敏感性分析技术有了新的发展^[3, 4]。由于面临高阶实一般阵特征值计算问题, 对复杂的工业透平高速转子-轴承系统的参数敏感性分析目前仍有较大困难。

用摄动技术作非自耦振动系统的参数敏感性分析, 需求解实一般阵广义特征值, 特别是全部左、右特征矢量。目前常用的方法是将其转化为标准特征值问题之后再用QR方法求解。

* 收文日期 1992-02-27
国家教委基金资助项目

在计算广义特征值问题的左、右特征矢量时,不仅要求逆且增加一倍的计算量。

本文在解实一般矩阵广义特征值问题的 QZ 方法^[1,2]基础上提出一种可一次同步求得全部特征值及相应的左、右特征矢量的方法,并将该方法应用于大型汽轮发电机组转子-轴承系统振动的参数敏感性分析。

1 实一般阵广义特征值问题的 QZ 方法

非自耦离散振动系统分析归结为如下广义特征问题^[9]:

$$A\varphi = \lambda B\varphi \quad (1)$$

其中 A, B 为实一般矩阵。广义特征值问题的 QZ 算法是一种约化方法,它基于如下定理^[6]。

若 A, B 为实一般矩阵,则存在酉阵 Q 与 Z ,使得 $(QAZ), (QBZ)$ 均为上三角阵,对应的对角元素的商为特征值。

QZ 方法首先是将 A, B 阵约化为中间矩阵,即由 Householder 变换将 B 约化为上三角阵后再将 A 约化为上 Hessenberg 阵并保持 B 上三角形式不变。然后对中间矩阵(仍记作 A 与 B)施行 QZ 迭代。迭代的结果是 A 趋于上三角阵或拟上三角阵, B 为上三角阵,由此可以求出全部实或复特征值且无需求逆运算。因此,当 B 阵奇异或病态时也能计算。由于单步 QZ 迭代在 B 阵近似奇异时可能不稳定,且不适于复特征值计算,可采用双步 QZ 迭代或单-双步组合法^[2]。

计算过程中,约化后的矩阵仍存入 A, B 阵中,为同步计算左、右特征矢量还应记录全部左、右乘变换阵,若 A (或 B) 为 $n \times n$ 则总存储量约 $4n^2$ 。

2 双特征矢量同步递推算法

由矩阵理论知,在酉变换下特征值问题是等价的。因此,由 $(QAZ)y = \lambda(QBZ)y$ 及 $x^T(QAZ) = \lambda x^T(QBZ)$ 有

$$\varphi = Zy, \quad l = Q^T x \quad (2)$$

其中 λ, φ, l 为广义特征值问题(1)的特征值与对应的右、左特征矢量。当已知特征值时由 $(QAZ), (QBZ)$ 的上三角或拟上三角特性可递推解出约化系统的左、右特征矢量 x, y , 由(2)即可求得原系统特征矢量对。

运用组合 QZ 法求得全部特征值后,特征矢量求解归结为解拟三角复系数线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{A} - \lambda_r \bar{B})y &= 0 \\ (\bar{A} - \lambda_r \bar{B})^T x &= 0 \\ r &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\bar{A} = QAZ, \bar{B} = QBZ$, 而 $G_r = (\bar{A} - \lambda_r \bar{B})^T$ 为拟三角奇异阵。下面以左特征矢量为例说明递推求解过程。

设系统第 i 个特征值 $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$, λ_i 为实数时($\omega_i = 0$)则 \bar{A} 对应的第 i 主对角元构成一阶子块;若 λ_i 为复值则对应的主对元构成二阶子块。再设 $x_i^T = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$, $G_i = (\bar{A} - \lambda_i \bar{B})^T = [g_{ij}]$, 其中 $\bar{x}_i = \bar{x}_i^r + \bar{x}_i^i \cdot j$, $g_{ij} = g_{ij}^r + g_{ij}^i \cdot j$, 均为复数。

1) λ_i 为实数时

对应的 G, x 均为实量, 可略去上标“R”得到递推公式

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

当 $j > i$ 时分两种情况

a) 第 j 主元处恰为一阶子块时

$$\bar{x}_j = -\frac{1}{g_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k$$

b) 第 j 主元处为二阶子块时

$$\bar{x}_j = \frac{[g_{j+1,j} \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k - g_{j+1,j+1} \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k]}{g_{jj}g_{j+1,j+1} - g_{j+1,j} \cdot g_{j,j+1}}$$

$$\bar{x}_{j+1} = -\left[\sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k + g_{jj} \bar{x}_j \right] / g_{j+1,j}$$

2) λ 为复数时

方程(3)第二式形式如下(“ \times ”为非零元)

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & & & \vdots \\ \times & \times & \times & \times & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \times & 0 & 0 & \vdots \\ & & & \times & \times & 0 & \vdots \\ \times & \times & \times & & \times & 0 & 0 \\ & & & & \times & 0 & 0 \\ & & & & & \times & \times & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \times & \times & 0 \\ & & & & & & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \dots & \dots & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{x}_j^n + \bar{x}_j' \cdot j \\ \vdots \\ \bar{x}_n^n + \bar{x}_n' \cdot j \end{Bmatrix} = 0$$

递推式为

$$\begin{aligned} \bar{x}_j^n &= \bar{x}_j' = 0 & j < i \\ \bar{x}_j^n &= 1 & \bar{x}_j' = 0 & j = i \\ \bar{x}_j^n &= -(g_{jj}^n \cdot g_{n+1}^n + g_{jj}^i \cdot g_{n+1}^i) / |g_{n+1}^n|^2 \\ \bar{x}_j' &= -(g_{jj}^n \cdot g_{n+1}^i - g_{jj}^i \cdot g_{n+1}^n) / |g_{n+1}^n|^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{x}_j^n &= \bar{x}_j' = 0 \\ \bar{x}_j^n &= 1 \\ \bar{x}_j^n &= -(g_{jj}^n \cdot g_{n+1}^n + g_{jj}^i \cdot g_{n+1}^i) / |g_{n+1}^n|^2 \\ \bar{x}_j' &= -(g_{jj}^n \cdot g_{n+1}^i - g_{jj}^i \cdot g_{n+1}^n) / |g_{n+1}^n|^2 \end{aligned}} \right\} j = i + 1$$

$j > i - 1$ 时

a) 对应 j 主元处为一阶子块时

$$\bar{x}_j^n = (g_{jj}^n \cdot R_j - g_{jj}^i S_j) / |g_{jj}^n|^2$$

$$\bar{x}_j' = (g_{jj}^i \cdot S_j - g_{jj}^n R_j) / |g_{jj}^n|^2$$

$$R_j = Re \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k \right\}$$

$$S_j = Im \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} \cdot \bar{x}_k \right\}$$

b) 对应 j 主元处为二阶子块时

$$\begin{aligned}\bar{x}_j^n &= (D^n T^n + D' T^n) / |D|^2 \\ \bar{x}_j^n &= (D^n T^n - D' T^n) / |D|^2 \\ \left. \begin{aligned}\bar{x}_{j+1}^n &= (-R_j - g_{jj}^n \cdot \bar{x}_j^n + g_{jj}^n \bar{x}_j^n) / g_{j+1}^n \\ \bar{x}_{j+1}^n &= (-S_j - g_{jj}^n \cdot \bar{x}_j^n - g_{jj}^n \bar{x}_j^n) / g_{j+1}^n\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}D^n &= g_{j+1}^n g_{j+1}^n - g_{j+1, j+1}^n g_{jj}^n + g_{j+1, j+1}^n g_{jj}^n \\ D' &= g_{j+1, j+1}^n g_{jj}^n - g_{j+1, j+1}^n \cdot g_{jj}^n + g_{j+1, j+1}^n g_{jj}^n \\ D &= D^n + D' \cdot j \\ T^n &= -g_{j+1}^n \cdot R_{j+1} + g_{j+1, j+1}^n \cdot R_j - g_{j+1, j+1}^n \cdot S_j \\ T' &= -g_{j+1}^n \cdot S_{j+1} + g_{j+1, j+1}^n \cdot S_j + g_{j+1, j+1}^n \cdot R_j\end{aligned}$$

右特征矢量也可类似地导出,经变换即可求出原系统全部左、右特征矢量。特征矢量计算在约化迭代后一次同步解出。

3 转子 - 轴承系统参数敏感性分析

转子 - 轴承系统的固有特性分析归结为广义特征值问题(1),固有特性对各系统参数依赖关系可采用摄动技术进行分析,第 k 阶特征值 λ_k 与参数 p_k 的关系可表为

$$\begin{aligned}\lambda_{k, j} &= \sigma_{k, j} + \beta_{k, j} \cdot j \\ &= \partial \sigma_k / \partial p_k + \partial \beta_k / \partial p_k \cdot j \\ &= U_k^T (A_{k, j} - \lambda_k B_{k, j}) \varphi_k / U_k^T B \varphi_k \\ \text{其中 } A_{k, j} &= \partial A / \partial p_k, B_{k, j} = \partial B / \partial p_k\end{aligned}$$

其中

相对敏感性系数为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_k}{|\sigma_k|} \bigg/ \frac{dp_k}{|p_k|} &= \left| \frac{p_k}{\sigma_k} \right| \cdot \sigma_{k, j} \\ \frac{d\beta_k}{|\beta_k|} \bigg/ \frac{dp_k}{|p_k|} &= \left| \frac{p_k}{\beta_k} \right| \cdot \beta_{k, j}\end{aligned}$$

算例 1: 单级离心透平转子 - 轴承系统^[7]

系统无量纲化振动方程为

$$\begin{aligned}Mx'' + Cx' + Kx &= 0 \\ M &= \begin{bmatrix} \delta \Omega^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \delta \Omega^2 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \bar{C}_{xx} & \bar{C}_{xy} \\ 0 & \bar{C}_{yx} & \bar{C}_{yy} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} 1 & \delta Q/2 & -1 & 0 \\ -\delta Q/2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \bar{K}_{xx} + \frac{1}{\delta} & \bar{K}_{xy} \\ 0 & -1 & \bar{K}_{yx} & \bar{K}_{yy} + \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中 $Q = 0.25$ 代表气体激振效应大小,其余无量纲量见[7]. 计算结果如表 1~3,其弹性一阶临界处由于轴承刚度不对称而有两个相互接近的固有频率,其中之一是失稳的($\sigma_{3,1} > 0$).

表 1 系统特征值

λ_1, λ_2	λ_3, λ_4	λ_5, λ_6	λ_7, λ_8
$-0.08274 \pm 1.05175j$	$0.020276 \pm 1.03549j$	$-0.080353 \pm 0.51971j$	0

表 2 特征值的参数敏感性

	$\sigma_{1,j}$	$\beta_{1,j}$	$\sigma_{3,j}$	$\beta_{3,j}$	$\sigma_{5,j}$	$\beta_{5,j}$
Q	-2592.000	238.800	2779.00	-159.50	-187.70	384.50
\bar{K}_{xx}	0.570	-3.104	12.40	-19.46	-267.10	2.57
\bar{K}_{yy}	3.019	-2.116	-17.85	-14.47	-17.57	261.30
\bar{K}_{xy}	-2.083	-1.829	21.47	8.939	-51.79	-267.20
\bar{K}_{yy}	-0.234	-3.229	11.28	-20.22	-265.20	30.54
\bar{c}_{xx}	3.217	0.856	20.40	12.44	20.13	-139.00
\bar{c}_{yy}	2.022	3.151	14.62	-18.78	-134.40	-30.13
\bar{c}_{xy}	2.096	-2.039	-8.82	22.41	143.00	-5.44
\bar{c}_{yy}	3.416	0.021	21.17	11.27	5.44	-140.30

表 3 相对敏感系数

	σ_1	β_1	σ_3	β_3	σ_5	β_5
Q	-783.10	5.676	3428.00	-3.849	-58.39	18.49
\bar{K}_{xx}	1.62	-6.936	143.70	-4.417	-781.20	1.16
\bar{K}_{yy}	36.49	-2.012	-880.40	-13.980	-218.70	502.80
\bar{K}_{xy}	-25.17	-1.739	1058.70	8.632	-644.50	-514.10
\bar{K}_{yy}	-0.36	-0.3898	70.65	-2.480	-419.20	7.46
\bar{c}_{xx}	77.76	-6.140	2012.70	24.03	501.00	-534.90
\bar{c}_{yy}	6.232	0.764	183.90	-4.62	-426.50	-14.77
\bar{c}_{xy}	6.458	-0.494	-110.90	5.52	453.90	2.72
\bar{c}_{yy}	82.56	0.040	2088.00	21.77	135.40	539.80

结果表明气体激振作用对系统稳定性影响最大.由敏感系数可求得失稳的临界值 Q_c .

$$Q_c = Q - \sigma_{3,1} / (\lambda_{\sigma_{3,1}} / \partial Q) = 0.177$$

与精确值比较其误差仅为 4%。

算例 2: 200 MW 汽轮发电机组转子-轴承系统^[8], 直接在其有限元模型上进行参数敏感性分析将涉及高阶实一般阵广义特征值问题计算, 因此会面临计算精度、计算机容量等困难。采用模态综合方法使系统规模缩减后可用本文方法对其进行参数敏感性分析。

由于油膜轴承动特性系数对稳定性影响很大故对这些参数进行分析, 为考查各轴承对系统稳定性的影响程度采用了综合敏感度系数 $|S_k|$, k 为轴承标号^[9], 分析结果如图 1、2。这些结果的意义在于通过监测与控制那些对系统稳定性影响最大的轴承的各种物理参数将有助于预测与控制系统的失稳。

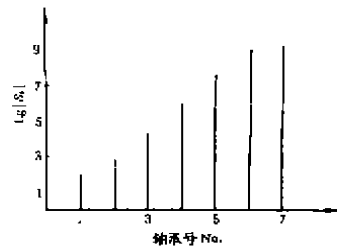


图 1 一阶特征值实部敏感性

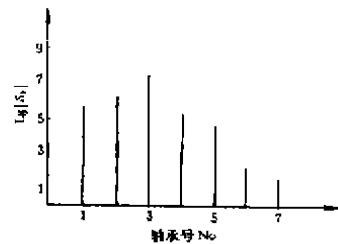


图 2 二阶特征值实部敏感性

4 结 语

本文在组合 QZ 方法基础上提出了一种同步计算全部左、右特征矢量的算法, 经算例考核证实该方法是正确的, 该方法较 QR 方法在解双特征矢量时效率提高近一倍。

该方法较适合于复杂的非自耦振动系统的参数敏感性分析, 如含有流-固耦合作用的大型转子-轴承系统。

参 考 文 献

- 1 Moler C B, Stewart G W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1973, 10(2);
- 2 周树基, 戴华. 计算非对称矩阵广义特征值问题的组合 QZ 法. *南京航空学院学报*, 1983, (1);
- 3 Fritzen C P, Nordmann R. Sensitivity of the eigen-values of rotors to parameter modifications. *Energ elet.*, 1982
- 4 Palazzolo A B, Wang B P, Pilkey N D. Eigen-solution reanalysis of rotor dynamic systems by the generalized receptance method. *ASME J. of Eng. for Power*, 1983, 105(3);
- 5 郑兆昌. 复杂结构振动研究的模态综合技术. *振动与冲击*, 1982, 1(1)
- 6 曹志浩. 矩阵特征值问题. 上海科技出版社, 1980
- 7 Barrett L E, Gunter E J. Stabilization of aerobynamically excited trubomachinery with hydrodynamic jornal bearings and supports. *Rotordynamic instability problems in high performance turbomachinery*, NASA CP-2133, 1980
- 8 黄文振等. 汽轮发电机组转子-轴承系统动力稳定性分析. *上海交通大学学报*, 1990, 24(3);
- 9 黄文振等. 大型转子系统参数敏感性分析方法与应用. *重庆大学学报*, 1993, 16(1);