(10) 58－66

油、气田勘探开发效益分析的数学规划法*

The Mathematical Programming Methods of Benefit Analysis for Exploration and Exploitation of Petroleum-Gas Fields

全理伟
Quan Liwei
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044)

P618.130.8

A

摘 要 建立了油、气田勘探开发效益分析的数学规划模型及与勘探开发有关的"快打快放"定理(当物价上涨率大于或等于年复利北时)和"快放"定理(当物价上涨率小于年复利率时)；最后，用构造性方法，证明了油、气田勘探开发的数学规划模型解的存在定理。

关键词 效益分析；勘探开发；数学规划；油、气田 油田、气田
中国图书资料分类法分类号 O 221

ABSTRACT Firstly the mathematical programming models are established for the benefit analysis for exploration and exploitation of petroleum-gas field; then the "fast drill well and fast release" the orems (when the increasing rate of commadity prices is greater than or equal to the compound interest por year) and the "fast release" the orem (when the increasing rate of prices is lower than the compocmd interest per year) which have practical sygnificance in the explortion and exploitation of the petroleum-gas fields are progosed; finally, the existence theorems have been proved of the solutions of these models with the help of the constructive method.

KEYWORDS benefit analysis; exploration and exploitation; mathematical programming; petroleum-gas fiedl

0 引 言

本文是在完成某合同项目的基础上，力图把数学规划和企业经济效益评价的动态法结合起来，作为研究我国油、气田勘探开发效益分析问题的尝试。

另外，本文给出的油、气田开发的"快打快放"定理，是受康世恩先生的启发，康老在任石油工业部部长期间，曾号召石油战线应"快打快放"的开发油田。

1 油、气田勘探开发效益分析的数学规划模型

已知某油田要开发 A 口井，开发前打勘探井的地震试验费为 δ 万元，其成功率为 α，分 n

* 收文日期 1993-01-08

批依次于第 1,2,…,n 年勘探完，每口勘探井的钻井和井下作业投资为 a 万元；每批勘探完后立即开发，每批井 m 年开发完，每口开发井的年经营支出费为 b 万元，每口井的产油量为 B 吨，每口井相应年的产油量相同，每吨的价格不变，每年均为 c 万元；物价上涨率 t 已知，记 $u = 1 + t$；折现率（或年复利率）β 已知，记 $F = \frac{1}{1+\beta}$；税金率 τ 已知，问如何勘探开发，才会获得最大的经济效益。

设第 i 批开发 x_i 口井，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A$$

$$x_i = 0,1,2,\cdots,x_0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 x_0 为每批最大开发井数。

设每口井第 j 年产油为 y_j 吨，则

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = B$$

$$0 \leqslant y_j \leqslant y_0 \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$

其中 y_0 为每口井的最大年产量。

按投资效益分析的净现值法，则折现投资

$$Q = \begin{cases} \left[\left(\frac{a}{\alpha} + mb\right)A + \delta\right]F, & Fu = 1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a}{\alpha} + b\left(\frac{1 - F^m u^m}{1 - Fu}\right)\right]F^i u^{i-1} x_i + F\delta, & Fu \neq 1 \end{cases}$$

净现值

$$T = c(1 - \tau)\sum_{i=1}^{n} F^{i-1} x_i \sum_{j=1}^{m} F^j y_j - Q$$

设 M,N 为充分大的给定的正整数，综合上述，得油、气田勘探开发效益分析的数学规划模型，当 $Fu \geqslant 1$ 为：

（Ⅰ）　max　T

　　min　Q

　　s.t.　$\sum_{i=1}^{n} x_i = A$

　　　　$\sum_{j=1}^{m} y_j = B$

$x_i = 0,1,2,\cdots,x_0 (i = 1,2,\cdots,n), x_n > 0, n \in \{k+1, k+2,\cdots,N\}$，（其中 k 满足条件：$0 < A - kx_0 \leqslant x_0$）。$0 \leqslant y_j \leqslant y_0 (j = 1,2,\cdots,m) y_m > 0, m \in \{s+1, s+2,\cdots,N\}$，（其中 s 满足条件：$0 < B - sy_0 \leqslant y_0$）。

当 $Fu < 1$ 时，为

（Ⅱ）　max　T

　　s.t.　$\sum_{i=1}^{n} x_i = A$

　　　　$\sum_{j=1}^{m} y_j = B$

$x_i = 0,1,2,\cdots,x_0(i = 1,2,\cdots,n)$，$n \in \{k+1,k+2,\cdots,N\}$，(其中 k 满足条件：$0 < A - kx_0 \leqslant x_0$)；$0 \leqslant y_j \leqslant y_0(j = 1,2,\cdots,m)$，$m \in \{s+1,s+2,\cdots,M\}$，(其中 s 满足条件：$0 < B - sy_0 \leqslant y_0$)。

2 油、气田勘探开发的快打快放定理

定理 1 若 $Fu = 1$，设 $x^{1} = (x_1^{1},x_2^{1},\cdots,x_{n_1}^{1})$，$y^{1} = (y_1^{1},y_2^{1},\cdots,y_{m_1}^{1})$，$n_1 \in \{k+1,k+2,\cdots,N\}$，$m_1 \in \{s+1,s+2,\cdots,M\}$ 和 $x^{11} = (x_1^{11},x_2^{11},\cdots,x_{n_2}^{11})$，$y^{11} = (y_1^{11},y_2^{11},\cdots,y_{m_2}^{11})$，$n_2 \in \{k+1,k+2,\cdots,N\}$，$m_2 \in \{s+1,s+2,\cdots,M\}$ 为数学规划模型(Ⅰ)的任二容许解，且满足条件：

1) $n_1 \leqslant n_2, m_1 \leqslant m_2$

2) $\sum_{s=1}^{i} x_s^{1} \geqslant \sum_{s=1}^{i} x_s^{11}(i = 1,2,\cdots,n_1 - 1)$

$\sum_{r=1}^{j} y_r^{1} \geqslant \sum_{s=1}^{j} y_s^{11}(j = 1,2,\cdots,m_1 - 1)$

则

$$Q(x^{1},y^{1}) \leqslant Q(x^{11},y^{11})；T(x^{1},y^{1}) \geqslant T(x^{11},y^{11})$$

证 因 $m_1 \leqslant m_2$，故 $\left[\left(\frac{a}{\alpha} + bm_1\right)A + \delta\right]F \leqslant \left[\left(\frac{a}{\alpha} + bm_2\right)A + \delta\right]F$，即 $Q(x^{1},y^{1}) \leqslant Q(x^{11},y^{11})$。

因 $\sum_{j=1}^{m_1} y_j^{1} = \sum_{j=1}^{m_2} y_j^{11}$，故 $F^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1} y_j^{1} = F^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} y_j^{11}$，即 $F^{m_1}y_{m_1}^{1} + F^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1-1}(y_j^{1} - y_j^{11}) = F^{m_1}\sum_{j=m_1}^{m_2} y_j^{11}$。由条件 2) 及上式($0 < F < 1$)得

$$F^{m_1}y_{m_1}^{1} + F^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_1-1}(y_j^{1} - y_j^{11}) \geqslant F^{m_1}\sum_{j=m_1}^{m_2} y_j^{11}$$

即

$$\sum_{j=m_1-1}^{m_1} F^{j}y_j^{1} + F^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_1-2}(y_j^{1} - y_j^{11}) \geqslant \sum_{j=m_1-1}^{m_2} F^{j}y_j^{11}$$

再由条件 2) 及 $0 < F < 1$，由上式得：

$$\sum_{j=m_1-1}^{m_1} F^{j}y_j^{1} + F^{m_1-2}\sum_{j=1}^{m_1-2}(y_j^{1} - y_j^{11}) \geqslant \sum_{j=m_1-1}^{m_2} F^{j}y_j^{11}$$

即

$$\sum_{j=m_1-2}^{m_1} F^{j}y_j^{1} + F^{m_1-2}\sum_{j=1}^{m_1-3}(y_j^{1} - y_j^{11}) \geqslant \sum_{j=m_1-2}^{m_2} F^{j}y_j^{11}$$

继续递推下去，可得

$$\sum_{j=1}^{m_1} F^{j}y_j^{1} \geqslant \sum_{j=1}^{m_2} F^{j}y_j^{11}$$

从而有

$$T(x^{1},y^{1}) - T(x^{11},y^{11}) = c(1-r)\sum_{i=1}^{t_1} F^{i-1}x_i^{1}\sum_{j=1}^{m_1} F^{j}y_j^{1} - \sum_{i=1}^{t_2} F^{i-1}x_i^{11}\sum_{j=1}^{m_2} F^{j}y_j^{11} \geqslant 0$$

即

$$T(x^{1},y^{1}) \geqslant T(x^{11},y^{11})$$

定理 2 若 $Fu > 1$，设 $x^{1} = (x_1^{1},x_2^{1},\cdots,x_{n_1}^{1})$，$y^{1} = (y_1^{1},y_2^{1},\cdots,y_{m_1}^{1})$，$n_1 \in \{k+1,k+2,\cdots,N\}$，$m_1 \in \{s+1,s+2,\cdots,M\}$ 和 $x^{11} = (x_1^{11},x_2^{11},\cdots,x_{n_2}^{11})$，$y^{11} = (y_1^{11},y_2^{11},\cdots,y_{m_2}^{11})$，$n_2 \in \{k+1,k+2,\cdots,N\}$，$m_2 \in \{s+1,s+2,\cdots,M\}$ 为数学规划模型(Ⅰ)的任二容许解，且满足条件：

1) $n_1 \leqslant n_2, m_1 \leqslant m_2$

2) $\sum_{i=1}^{t} x_i^1 \geqslant \sum_{i=1}^{t} x_i^{11} (i=1,2,\cdots,n_1-1)$

$\sum_{i=1}^{j} y_i^1 \geqslant \sum_{i=1}^{j} y_i^{11} (j=1,2,\cdots,m_1-1)$

则

$$Q(x^1,y^1) \leqslant Q(x^{11},y^{11}); T(x^1,y^1) \geqslant T(x^{11},y^{11})$$

证　因　$Q(x^1,y^1) - Q(x^{11},y^{11})$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{a}{\alpha}+b\left(\frac{F^{m_1}u^{m_1}-1}{Fu-1}\right)\right]F^i u^{i-1}x_i^1 - \sum_{i=1}^{n_2}\left[\frac{a}{\alpha}+b\left(\frac{F^{m_2}u^{m_2}-1}{Fu-1}\right)\right]F^i u^{i-1}x_i^{11}$$

$$=\frac{1}{u}\left(\sum_{i=1}^{n_1}P^1\beta^i x_i^1 - \sum_{i=1}^{n_2}P^{11}\beta^i x_i^{11}\right)$$

其中 $P^1 = \frac{a}{\alpha}+b\left(\frac{F^{m_1}u^{m_1}-1}{Fu-1}\right), P^{11} = \frac{a}{\alpha}+b\left(\frac{F^{m_2}u^{m_2}-1}{Fu-1}\right)$ 且 $P^1 \leqslant P^{11}, \beta = Fu > 1$.

故只须证明：$\sum_{i=1}^{n_2}\beta^i(x_i^1 - x_i^{11}) \leqslant 0$，其中 $x_i^1 = 0 (i = n_1+1, n_1+2, \cdots, n_2)$.

因　$\beta^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_i^1 - x_i^{11}) = 0$，则

$$\beta^{n_1}\sum_{i=n_1}^{n_2}x_i^{11} = \beta^{n_1}x_{n_1}^1 + \beta^{n_1}\sum_{i=1}^{n_1-1}(x_i^1 - x_i^{11}) \geqslant \beta^{n_1}x_{n_1}^1 + \beta^{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1-1}(x_i^1 - x_i^{11})$$

即

$$\beta^{n_1}\sum_{i=n_1}^{n_2}x_i^{11} + \beta^{n_1-1}x_i^{11} \geqslant \beta^{n_1}x_{n_1}^1 + \beta^{n_1-1}x_{n-1}^1 + \beta^{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1-2}(x_i^1 - x_i^{11}), \text{则}$$

$$\sum_{i=n_1-1}^{n_2}\beta^i x_i^{11} \geqslant \sum_{i=n_1-1}^{n_1}\beta^i x_i^1 + \beta^{n_1-2}\sum_{i=1}^{n_1-2}(x_i^1 - x_i^{11})$$

即

$$\sum_{i=n_1-2}^{n_1}\beta^i x_i^{11} \geqslant \sum_{i=n_1-2}^{n_1}\beta^i x_i^1 + \beta^{n_1-2}\sum_{i=1}^{n_1-3}(x_i^1 - x_i^{11})$$

如此继续下去，可得

$$\sum_{i=1}^{n_2}\beta^i x_i^{11} \geqslant \sum_{i=1}^{n_1}\beta^i x_i^1$$

即

$$\sum_{i=1}^{n_2}\beta^i(x_i^1 - x_i^{11}) \leqslant 0$$

从而 $Q(x^1,y^1) \leqslant Q(x^{11},y^{11})$ 得证。

定理 1 中，已证

$$\sum_{i=1}^{n_1}F^{i-1}x_i^1\sum_{j=1}^{m_1}F^j y_j^1 - \sum_{i=1}^{n_2}F^{i-1}x_i^{11}\sum_{j=1}^{m_2}F^j y_j^{11} \geqslant 0,$$

故　$T(x^1,y^1) - T(x^{11},y^{11})$

$$= c(1-r)\left[\sum_{i=1}^{n_1}F^{i-1}x_i^1\sum_{j=1}^{m_1}F^j y_j^1 - \sum_{i=1}^{n_2}F^{i-1}x_i^{11}\sum_{j=1}^{m_2}F^j y_j^{11}\right] + Q(x^{11},y^{11}) - Q(x^1,y^1) \geqslant 0$$

从而有

$$T(x^1,y^1)\geqslant T(x^{11},y^{11})$$

说明定理 1 和定理 2 中的条件 1) 表明：前一个开发方案的开发期比后一个开发方案的开发期短；而条件 2) 与条件：

$$\frac{1}{i}\sum_{s=1}^{i}x_s^1\geqslant\frac{1}{i}\sum_{s=1}^{i}x_s^{11}\qquad(i=1,2,\cdots,n_1-1)$$

$$\frac{1}{j}\sum_{s=1}^{j}y_s^1\geqslant\frac{1}{j}\sum_{s=1}^{j}y_s^{11}\qquad(j=1,2,\cdots,m_1-1)$$

等价，这个条件表明：前一个方案的打井速度和出油速度比后一个开发方案的打井速度和出油速度要快。因此，定理 1 和定理 2 表明：当 $Fu\geqslant 1$ 时、只要"快打快放"的开发油田，就能使投资减少，效益增大。故称定理 1 和定理 2 为"快打快放"定理。

定理 3 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y^1=(y_1^1,y_2^1,\cdots,y_{m_1}^1)$，和 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y^{11}=(y_1^{11},y_2^{11},\cdots,y_{m_2}^{11})$ 为 I) 的两个容许解，且

1) $m_1\leqslant m_2$

2) $\sum_{j=1}^{k}y_j^1\geqslant\sum_{j=1}^{k}y_j^{11}(k=1,2,\cdots,m_1-1)$

则 $T(x,y^1)\geqslant T(x,y^{11})$

证令 $Q_1=\sum_{j=1}^{n}F^{j-1}x_j,Q_2=\sum_{j=1}^{n}F^ju^{j-1}x_j$，则

$$T(x,y^1)-T(x,y^{11})$$

$$=c(1-r)Q_1\Big[\sum_{j=1}^{m_1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-\sum_{j=m_1+1}^{m_2}F^{j-1}y_j^{11}\Big]+bQ_2\Big[\frac{(Fu)^{m_1}-(Fu)^{m_2}}{1-Fu}\Big]$$

下证
$$\sum_{j=1}^{m_1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-\sum_{j=m_1+1}^{m_2}F^{j-1}y_j^{11}\geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{m_1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-\sum_{j=m_1+1}^{m_2}F^{j-1}y_j^{11}\geqslant\sum_{j=1}^{m_1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-1}\sum_{j=m_1+1}^{m_2}y_j^{11}$$

$$=\sum_{j=1}^{m_1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_1}(y_j^1-y_j^{11})=\sum_{j=1}^{m_1-1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_1-1}y_j^{11}$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{m_1-1}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-2}\sum_{j=1}^{m_1-1}(y_j^1-y_j^{11})=\sum_{j=1}^{m_1-2}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-2}\sum_{j=1}^{m_1-2}(y_j^1-y_j^{11})$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{m_1-3}F^{j-1}(y_j^1-y_j^{11})-F^{m_1-3}\sum_{j=1}^{m_1-1}(y_j^1-y_j^{11})\geqslant\cdots\geqslant y_j^1-y_j^{11}-F(y_j^1-y_j^{11})$$

$$=(1-F)(y_j^1-y_j^{11})\geqslant 0$$

又因 $bQ_2\Big[\frac{(Fu)^{m_1}-(Fu)^{m_2}}{1-Fu}\Big]\geqslant 0$，故 $T(x,y')\geqslant T(x,y'')$.

与前面类似，可称定理 3 为"快放"定理。

3　油、气田勘探开发数学规划模型解的存在定理

定理 4　若 $Fu \geqslant 1$，则数学规划（Ⅰ）有唯一最优解：$x' = (x_1', x_2', \cdots, x_{k+1}')$ 其中，$x_i' = x_0(i = 1, 2, \cdots, k)$，$x_{k+1}' = A - kx_0$，$n = k + 1$；$y' = (y_1', y_2', \cdots, y_{s+1}')$ 其中，$y_j' = y_0(j = 1, 2, \cdots, s)$，$y_{s+1}' = B - sy_0$，$m = s + 1$；其中 k 满足条件：$0 < A - kx_0 \leqslant x_0$，$s$ 满足条件：$0 < B - sy_0 \leqslant y_0$。

证设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为数学规划模型（Ⅰ）的任一容许解，则

1）　$n \geqslant k + 1$，$m \geqslant s + 1$

2）　$\sum\limits_{s=1}^{i} x_s' \geqslant \sum\limits_{s=1}^{i} x_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$

$\sum\limits_{s=1}^{j} y_s' \geqslant \sum\limits_{s=1}^{j} y_s \qquad (j = 1, 2, \cdots, s)$

且 x'，y' 为（Ⅰ）的容许解，根据"快打快放"定理，$Q(x', y') \leqslant Q(x, y)$，$T(x', y') \geqslant T(x, y)$，故 (x', y') 为（Ⅰ）的最优解。

上面已证 $x' = (x_1', x_2', \cdots, x_{k+1}')$，$y' = (y_1', y_2', \cdots, y_{s+1}'$ 为 Ⅰ）的最优解。设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为 Ⅰ）的另一最优解，且 $(x', y') \neq (x, y)$。下面证明后一种最优解不存在，从而唯一性得证。

1）当 $Fu = 1$ 时，分为下列两种情形：

A 当 $y \neq y'$ 时，分为下列两种情形：

a）当 $m \neq s + 1$ 时，则 $m > s + 1$，且 $Q(x', y') = \left\{\left[\frac{a}{\alpha} + (s+1)b\right]A + \delta\right\}F$，$Q(x, y) = \left\{\left[\frac{a}{\alpha} + mb\right]A + \delta\right\}F$，故 $Q(x', y') < Q(x, y)$，即 (x, y) 不为 Ⅰ）的最优解。

b）当 $m = s + 1$ 时，因 $y' \neq y$，则至少有一个 $y_{j_0}' > y_{j_0}(1 \leqslant j_0 \leqslant s)$，故

$$\sum_{j=1}^{s+1}(y_j' - y_j)F^j = \sum_{j=1}^{s}F^j(y_j' - y_j) + F^{s+1}(y_{s+1}' - y_{s+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{s}F^j(y_j' - y_j) - F^{s+1}\sum_{j=1}^{s}(y_j' - y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s}(F^j - F^{s+1})(y_j' - y_j) > 0$$

即

$$\sum_{j=1}^{s+1}F^j y_j' > \sum_{j=1}^{s+1}F^j y_j$$

于是，当 $x' = x$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i' = \sum\limits_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i$，从而有 $T(x', y') - T(x, y) = c(1 - r)\left[\sum\limits_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'\sum\limits_{j=1}^{s+1}F^j y_j' - \sum\limits_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i\sum\limits_{j=1}^{s+1}F^j y_j\right] > 0$，即 $T(x', y') - T(x, y) > 0$，故 (x, y) 不为 Ⅰ）的最优解。

又当 $x' \neq x$，且 $n = k + 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i' > \sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i$$

从而有 $T(x',y')-T(x,y)=c(1-r)\left[\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'\sum_{j=1}^{s-1}F^jy_i-\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i\sum_{j=1}^{s+1}F^jy_j\right]>0$，故 (x,y) 不为 I）的最优解。

最后，当 $x'\neq x$，且 $n>k+1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k}F^{i-1}(x_i'-x_i)-\sum_{i=k+1}^{n}F^{i-1}x_i+x_{k+1}'F^k\geqslant\sum_{i=1}^{k}F^{i-1}(x_i'-x_i)-\sum_{i=k+1}^{n}F^kx_i+x_{k+1}'F^k$$

$$=\sum_{i=1}^{k}F^{i-1}(x_i'-x_i)+F^k(x_{k+1}'-\sum_{i=k+1}^{n}x_i)=\sum_{i=1}^{k}F^{i-1}(x_i'-x_i)-F^k\sum_{i=1}^{k}(x_i'-x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(F^{i-1}-F^k)(x_i'-x_i)$$

若有某个 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant k)$ 使 $x_{i_0}'>x_{i_0}$，由上式得

$$\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'>\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}x_i$$

否则，必有 $x_{k+1}'=\sum_{i=k+1}^{n}x_i$，则

$$F^kx_{k+1}'=\sum_{i=k+1}^{n}F^kx_i>\sum_{i=k+1}^{n}F^{i-1}x_i\qquad(x_n>0)$$

从而有
$$\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'>\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}x_i$$

综合上述，当 $x'\neq x$，且 $n>k+1$ 时有

$$\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'>\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}x_i$$

故当 $m=s+1$，且 $y'\neq y$ 时，有

$$T(x',y')-T(x,y)=c(1-r)\left[\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'\sum_{j=1}^{s+1}F^jy_j'-\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}x_i\sum_{j=1}^{s+1}y_j\right]>0$$

即 $T(x',y')>T(x,y)$，故 (x,y) 不是 I）的最优解。

B 当 $y=y'$ 时，则必有 $x'\neq x$，前面已证 $\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i'>\sum_{i=1}^{n}F^{i-1}x_i$，从而有

$$T(x',y')>T(x,y)$$

即 (x,y) 不为 I）的最优解。

2）当 $Fu>1$ 时，解的唯一性之证，分两种情形：

A 当 $x'\neq x$ 时，可分为至少存在一个 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant k)$，使 $x_{i_0}'>x_{i_0}$ 和不存在这样的 i_0，即 $x_i'=x_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 两种情形给出证明：

a）当 $x_{i_0}'>x_{i_0}(1\leqslant i_0\leqslant k)$ 时，则有 $\sum_{i=1}^{k}[(Fu)^{i-1}-(Fu)^k](x_i'-x_i)<0$. 若 (x,y) 为 I）的最优解，则

$$Q(x',y')-Q(x,y)=\sum_{i=1}^{k+1}A_{s+1}F^nu^{i-1}x_i'-\sum_{i=1}^{n}A_mF^nu^{i-1}x_i=0$$

其中 $A_{s+1}=\frac{a}{\alpha}+b\frac{1-(Fu)^{s+1}}{1-Fu}$，$A_m=\frac{a}{\alpha}+b\frac{1-(Fu)^m}{1-Fu}\quad(A_m\geqslant A_{s+1})$

故 $\sum_{i=1}^{k+1}(Fu)^{i-1}x_i' - \sum_{i=1}^{n}(Fu)^{i-1}x_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}(Fu)^{i-1}(x_i' - x_i) + (Fu)^k x_{k+1}' \sum_{i=k+1}^{n}(Fu)^{i-1}x_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}(Fu)^{i-1}(x_i' - x_i) + (Fu)^k\left[x_{k+1}' - \sum_{i=k+1}^{n} x_i\right] \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}[(Fu)^{i-1} - (Fu)^k](x_i' - x_i) \geqslant 0$，这与 $\sum_{i=1}^{k}[(Fu)^{i-1} - (Fu)^k](x_i' - x_i) < 0$ 矛盾。故 (x,y) 不为 I）的最优解。

b) 当 $x_i' = x_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 时，则 $x_{k+1}' = \sum_{i=k+1}^{n} x_i$，若 (x,y) 为（I）的最优解，则 $Q(x',y') - Q(x,y) = 0$，由 1) 有 $((Fu)^k x_{k+1}' - \sum_{i=k+1}^{n}(Fu)^{i-1}x_i \geqslant 0$，则 $x_{k+1}' \geqslant x_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n}(Fu)^{i-1-k}x_i (n \geqslant k + 2)$，这与 $x_{k+1}' = \sum_{i=k+1}^{n} x_i$ 矛盾，故 (x,y) 不为（I）的最优解。

B 当 $x' = x$ 时，则必有 $y' \neq y$，故可分为两种情形证明。

a) $m = s + 1$ 时，因 $y' \neq y$，故有 $j_0 (1 \leqslant j_0 \leqslant s)$ 使 $y_{j_0}' > y_{j_0}$，故 $T(x',y') - T(x,y) = c(1 - r)\sum_{i=1}^{k+1}F^{i-1}x_i' \sum_{j=1}^{s+1}F^{j}(y_j' - y_j) > 0$，从而 $T(x',y') > T(x,y)$，故 (x,y) 不为（I）的最优解。

b) $m > s + 1$ 时，则 $Q(x',y') - Q(x,y) < 0$，即 (x,y) 不是（I）的最优解。

下面考虑数学规划（I）的最优解。

定理 5　设 $y' = (y_1', y_2', \cdots, y_{s+1}')$，其中 $y_1' = y_2' = \cdots = y_s' = y_0$，$y_{s+1}' = B - sy_0$，$0 < B - sy_0 \leqslant y_0$，且 $x' = (x_1', x_2', \cdots, x_{n_1}')$ 为

（Ⅱ）
$$\max T(x,y') = \sum_{i=1}^{n}\left\{c(1-r)\sum_{j=1}^{s+1}F^{j-1}y_j' - \left[\frac{a}{a} + b\frac{1-(Fu)^{s+1}}{1-Fu}\right]u^{i-1}\right\}F^i x_i - F\delta.$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{s+1} x_j = A.$$

$x_i = 0,1,2,\cdots,x_0 (i = 1,2,\cdots,n)$，$k + 1 \leqslant n \leqslant N$，$0 < A - kx_0 \leqslant x_0$ 的最优解，则 x'，y' 为数学规划 I）的最优解。

证　显然 x'，y' 为 I）的容许解，要证 x'，y' 为 I）的最优解。设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为 I）的任一容许解。要证 $T(x,y') \leqslant T(x',y')$。

因 x 为 Ⅱ）的容许解，x' 为 Ⅱ）的最优解。故 $T(x,y') \leqslant T(x',y')$。

又 x，y 和 x，y' 均为（I）的容许解，且

1)　$s + 1 \leqslant m$

2)　$\sum_{j=1}^{k} y_j' \geqslant \sum_{j=1}^{k} y_j \quad (k = 1,2,\cdots,s)$.

根据定理 3，则 $T(x,y) \leqslant T(x',y')$。

综合上述，有 $T(x,y) \leqslant T(x',y')$。

定理 5 把 I）有无最优解转化为 Ⅱ）有无最优解。

设 Ⅱ）的目标函数的系数为 $a_i (i = 1,2,\cdots,n)$，用 $\{a_i\}$ 表示以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为元素的数集。

令 $b_1(n) = max\{a_i\}$，再用 $\{\{a_i\}|b_1(n), b_2(n), \cdots, b_{k-1}^{(n)}\}$ 表示从 $\{a_i\}$ 中去掉 $b_1(n), b_2(n), \cdots, b_{k-1}(n)$ 后的数集。

再令 $b_k(n) = max\{\{a_i\}|b_1(n), b_2(n), \cdots, b_{k-1}(n)\}$，得

$$b_1(n) \geqslant b_2(n) \geqslant \cdots \geqslant b_n(n) \quad (n = k+1, k+2, \cdots, N)$$

若 n 和 n' 为 $k+1$ 与 N 之间的任二正整数，且 $n > n'$，由定义，有

$$b_1(n) \geqslant b_1(n'), b_2(n) \geqslant b_2(n'), \cdots, b_{n'}(n) \geqslant b_{n'}(n')$$

以 $b_i(n)$ 为系数的 x_j 记为 z_i，于是（Ⅲ）化为

（Ⅲ′） $\max T = \sum_{i=1}^{n} b_i(n) z_i - F\delta$

s. t. $\sum_{i=1}^{n} z_i = A$

其中 $z_i = 0, 1, 2, \cdots, x_0 (i = 1, 2, \cdots, n), k+1 \leqslant n \leqslant N, 0 < A - kx_0 \leqslant x_0$.

定理 6（Ⅲ′）有最优解，且为

$$z_1^1 = z_2^1 = \cdots = z_k^1 = x_0, z_{k+1}^1 = A - kx_0, z_{k+2}^1 = z_{k+3}^1 = \cdots = z_N^1 = 0$$

证首先注意，对满足 $k+1 \leqslant n \leqslant N$ 的任意固定的 n，因 $b_1(n) \geqslant b_2(n) \geqslant \cdots \geqslant b_n(n)$，故数学规划

$$\max T = \sum_{i=1}^{n} b_i(n) z_i$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = A$$

$$z_i = 0, 1, 2, \cdots, x_0 (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有最优解。当 $n = k+1$ 时为：$z_1^1 = z_2^1 = \cdots = z_k^1 = x_0, z_{k+1}^1 = A - kx_0 (0 < A - kx_0 \leqslant x_0)$；当 $n \geqslant k+2$ 时为：$z_1^1 = z_2^1 = \cdots = z_k^1 = x_0, z_{k+1}^1 = A - kx_0, z_{k+2}^1 = z_{k+3}^1 = \cdots = z_n^1 = 0$.

再注意系数数列的性质有

$$\sum_{i=1}^{k+1} b_i(N) z_i^1 \geqslant \sum_{i=1}^{k+1} b_i(n) z_i$$

又因 $\sum_{i=1}^{k+1} b_i(n) z_i^1 \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i(n) z_i$，故

$$T(z^1) \geqslant T(z)$$

其中 $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \cdots, z_N^1), z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 为（Ⅲ′）的任一容许解。从而定理 6 得证。

定理 6 保证了（Ⅲ′）有最优解，从而（Ⅲ）有最优解，因而（Ⅰ）有最优解。由定理 6 可见，（Ⅲ）的最优解是容易求出的，从而得（Ⅰ）的最优解。

参 考 文 献

1 刘国恒主编. 工业建设项目可行性研究. 北京：科学普及出版社，1988