1994年7月 重庆大学学报 Vol. 17, №. 4
第17卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Jul. 1994

(13) 70-72

对称奇异 Hamilton 系统的非碰撞闭轨的存在性*

The Existence of Non-Collision Closed Orbits of Symmetric Singular Hamiltonian Systems

张世清
Zhang Shiqing
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044)

0316

A

摘 要 利用古典的极小化方法研究了一类次二次对称奇异 Hamilton 系统的非常值非碰撞闭轨的存在性。

关键词 对称奇异 Hamilton 系统；极小化方法；闭轨 哈密顿系统，

中国图书资料分类法分类号 O176.3

ABSTRACT Using classical minimization methods, we study the existence of non-constant and non-collision closed orbits for a class of subquadratic symmetric singular Hamiltonian systems.

KEYWORDS symmetric singular Hamiltonian systems; minimization methods; closed orbits

0 引 言

奇异 Hamilton 系统的周期解(闭轨)的研究具有重要的理论意义和实际意义，例如著名的 N-体问题就是一个奇异 Hamilton 系统。

1975年，W. B. Gordon 首次利用变分方法研究2-体问题，并引进了著名的强力条件(SF)[6]. 近几年来，人们将大范围变分理论用于研究奇异 Hamilton 系统，并取得了一系列的重大进展(例如见[1～5]及[7]).

本文利用古典的极小化方法研究了一类次二次对称奇异 Hamilton 系统的非常值非碰撞闭轨的存在性，我们得到如下两个结果：

定理1 考虑奇异二阶 Hamilton 系统：

$$\ddot{u} + au + W'(t,u) = 0, t \in R, u \in R^n\setminus\{0\} \quad (1)$$

其中 $W'(t,x) \equiv \nabla_x(t,x)$ 为 W 对 x 的偏导数；W 在 $u=0$ 奇异，即 $\forall\, t \in R, \lim\limits_{u\to 0} W(t,u) = -\infty$，

且存在 $T>0$ 使 $W(t+T,u) = W(t,u), \forall\, t \in R, \forall\, u \in R^n\setminus\{0\}$

令 $S_T' = R/T^z$

设 $W \in C^0(S_T' \times (R^n\setminus\{0\}))$ 满足强力条件(Ⅵ)，即

* 收文日期 1993-09-15

(SF)　存在 $U \in C^1(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ 和 $\rho > 0$ 使

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} U(x) = -\infty \\ W(t,x) \leqslant -|U'(x)|^2, \forall (t,x) \in S_T \times \mathbf{R}^n\setminus\{0\}), |x| < \rho\end{cases}$$

(V2)　$W\left(t+\frac{T}{2}, -x\right) = W(t,x), \quad \forall t \in S_T, \forall x \in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}$

(V3)　存在 $\omega > 0, r > 0$ 使 $\forall |x| \geqslant r, \forall t \in S_T$ 成立

$$W(t,x) \leqslant \frac{\omega}{2}|x|^2$$

(V4)　$a + \omega < \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$,

则系统(1)至少存在一个非常值非碰撞的 T- 周期解 x.

以下考虑带强迫项的奇异 *Hamilton* 系统，由定理 1 可得

定理 2　设 $V \in C^1(S_T \times (\mathbf{R}^n\setminus\{0\}), \mathbf{R})$，满足强力条件(V1)，次二次条件(V3)，(V4)及对称性条件：

(V2)′　$V(-x) = V(x)$

又假设 $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$　且　$\forall t \in S_T$ 有　$f\left(t+\frac{T}{2}\right) = -f(t)$

则二阶 Hamilton 系统：　$\ddot{x} + V'(x) = f(t)$

至少有一个非常值非碰撞的 T- 周期解。

2　定理 1 和 2 的证明

令

$$H^1 = \{u \mid u, \dot{u} \in L^2(S_T^1; \mathbf{R}^n)\}$$

则 H^1 在模：

$$\|u\| = \left(\int_0^T |\dot{u}|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T |u|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

之下是 Hilbert 空间。

令

$$E = \{u \in H^1 \mid u\left(t+\frac{T}{2}\right) = -u(t), \forall t \in S_T^1\}$$

$\forall u \in E$，u 在 H^1 中的模等价于：

$$\|u\| = \left(\int_0^T |\dot{u}|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|\dot{u}\|_2$$

显然 E 在上述模之下也是一 Hilbert 空间。

令

$$\Lambda = \{u \in E \mid u(t) \neq 0, \forall t \in S_T^1\}$$

在 Λ 上定义泛函

$$f(u) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - \frac{a}{2}|u|^2 - W(t,u)\right) dt, \forall u \in \Lambda$$

引理 1[3]　f 在 Λ 上的临界点是(1)的非碰撞闭轨。

引理 2[6]　若 W 满足强力条件(SF)，设 $\{u_n\} \subset \Lambda$，且 $u_n \to u \in \partial\Lambda$，则 $f(u_n) \to +\infty$.

引理 3 在条件(V1) ~ (V4) 之下，f 在 Λ 上强制且有下界。

证 易知 $\forall u \in \Lambda$，$\int_0^T u(t)dt = 0$，故由 Wirtinger 不等式有

$$\|u\|_2 \leqslant \frac{T}{2\pi}\|\dot{u}\|_2$$

又由(V3) 知，存在 $b > 0$ 使 $W(t,x) \leqslant \frac{\omega}{2}|x|^2 + b, \forall t \in S_T^1, \forall x \in \Lambda$

故由 f 的定义知，

$$f(u) \geqslant \frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2 - \frac{a}{2}\|u\|_2^2 - \frac{\omega}{2}\|u\|_2^2 - bT \geqslant \left[\frac{1}{2} - \frac{a+\omega}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]\|\dot{u}\|_2^2 - bT \qquad (*)$$

由(V4) 知，$\frac{1}{2} - \frac{a+\omega}{2}\left(\frac{T}{2\pi}\right) > 0$，故 f 在 Λ 上强制，即当 $\|u\| = \|\dot{u}\|_2 \to +\infty$ 时，$f(u) \to +\infty$。

又显然 $f(u) \geqslant -bT$，即 f 在 Λ 上有下界。

"定理 1 的证明："

由引理 3 知，$a \equiv \inf_{u \in \Lambda} f(u) > -\infty$，故存在极小化序列 $\{u_n\} \subset \Lambda$ 使 $f(u_n) \to a$

故由 f 在 Λ 上强制知，$\|\dot{u}_n\|_2$ 必有界，由 Wirtinger 不等式知，$\|u_n\|_2$ 也有界，故 u_n 是 H^1 中的有界序列，由 Sobolev 嵌入定理知，u_n 在 H^1 中有弱收敛子列，在 L^∞ 中有强收敛子列。仍记为 u_n，设 $u_n \xrightarrow{L^\infty} \bar{u}$，则由引理 2 知，$\bar{u} \in \Lambda$，显然 $f(\bar{u}) = a$，即 f 在 Λ 上达到下确界，显然 $f'(\bar{u}) = 0$，$\bar{u}$ 是(1) 的 T- 周期非碰撞闭轨，进一步，$\bar{u}$ 是非常值的。事实上，若 $\bar{u}(t) \equiv C$，则由 $u\left(t + \frac{T}{2}\right) = -u(t)$ 知，$C = 0$，即 $\bar{u}(t) \equiv 0$. 这与 $u \in \Lambda$，$\forall t \in S_T^1$，$u(t) \neq 0$ 相矛盾。证毕。

定理 2 是定理 1 的简单推论，不再证明。

作者感谢朱继生教授提出的许多宝贵意见。

参 考 文 献

1 A. Ambrosetti, V. Coti Zelati. Critical Points with lack of compactness and singular dynamical systems. Ann. Mat. Pura appl. 1987, 149; 237~259

2 A. Bahri, P. H. Rabinowitz. A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials. J. Funct. Anal., 1989, 82, 412~428

3 V. Coti Zelati. Periodic Solutions for N-body type problems. Ann. Inst. Henri Poincaré Analyse nonlinéaire. 1990, 7: 477~492

4 M. Degiovanni, F. Giannoni. Dynamical systems with Newtonian type potentials. Ann. Scu. Nor. Sup. Pisa, 1988, 4: 467~494

5 C. Greco. Periodic solutions of a class of singalar Hamiltonian systems. Nonlinear Analysis, T. M. A., 1988(2): 259~270

6 W. B. Gordon. Conservative dynamical system involving strong forces. Trans. A. M. S., 1975, 204; 113~135

7 P. Majer. Ljusternik-Schnirelmann theory with local Palais-Smale condition and singular dynamical systems. Ann. IHP Analyse nonlinéaire, 1991, 8; 459~476