

(3) 12-16

# 二维泊松过程的数值模拟 及其在道路模型中的应用

A Numerical Simulation of Two-Dimension Poisson  
Process and its Application in Simulation of an Uneven Road

张湘伟  
Zhang Xiangwei

何正友  
He Zhengyou

(重庆大学工程力学系, 重庆, 630044)

U411

**摘要** 提出了二维泊松过程的数值模拟模型, 在微机实现了数值模拟并进行了检验; 把该方法应用于二维泊松滤波过程道路模型的模拟, 比较好地表现了道路表面的起伏形状和与 ISO 案相近的道路谱。证明了所提方法及模型的可行性和实用性。

**关键词** 二维泊松过程; 道路; 数值模拟; 自谱

中国图书资料分类法分类号 O242.1

**ABSTRACT** An attempt is made to develop a numerical simulation model of two-dimension poisson process. Simulated and checked on computer, the road surface and spectrum of the road which close to the ISO. The method developed in this paper is proved to be feasible and practicable.

**KEYWORDS** tow-dimension poisson process; uneven road; numerical simulation; spectrum

## 0 引 言

进行结构动态响应分析, 首先需要把握住结构所受的动载荷, 工程结构常常受到随时间变化的随机载荷的作用。例如: 路面凹凸不平对行驶车辆的作用, 地震波对高层建筑的作用等。一般而言, 这类载荷可以用适当的随机过程来予以描述。

作者曾提出了由泊松滤波过程描述的路面凹凸的数值模型<sup>[1]</sup>, 比较好地反应了路面起伏的随机性、复杂性和多样性。本文主要研究了二维泊松过程数值模拟的一种新方法, 并以此为基础, 由二维泊松滤波过程模拟了复杂的路面起伏形状, 计算了汽车随机振动分析所需要的车轮轨迹的自谱。经数值实验, 证明本文所提出的方法是有效的。

## 1 二维泊松过程的数值模拟

二维泊松滤波过程以二维泊松过程为基础。本章着重研究一种新的二维泊松过程的数

\* 收文日期 1994-03-04

国家教委优秀年轻教师基金资助项目

值生成方法。

同一维泊松过程一样,当泊松点的单位面积发生率  $\lambda(x, y) = \lambda_0 = \text{const}$  时,二维泊松过程为平稳随机过程。对平稳二维泊松过程,在面积  $xy$  上存在  $n$  个泊松点的概率为:

$$P(n, xy) = \frac{(\lambda_0 xy)^n e^{-\lambda_0 xy}}{n!} \quad (1)$$

设  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  是  $xoy$  平面上的任意泊松点,则  $i$  点与  $j$  点间的距离  $r_{i-j}$  仍为随机变量。若  $(x_j, y_j)$  是离  $(x_i, y_i)$  最近的点,则意味着以  $(x_i, y_i)$  为圆心,以  $r_{i-j}$  为半径的圆内无其它泊松点,即有:

$$P(r_{i-j} > r) = P(0, \pi r^2) = e^{-\lambda_0 \pi r^2} \quad (2)$$

$$\text{则随机变量 } r \text{ 的累积分布函数为: } P^*(r \leq r_{i-j}) = 1 - e^{-\lambda_0 \pi r^2} \quad (3)$$

由(3)式,可求得  $r$  的概率密度函数如下式所示:

$$P_r(r) = \frac{dP^*(r \leq r_{i-j})}{dr} = 2\pi\lambda_0 r e^{-\lambda_0 \pi r^2}, r \geq 0 \quad (4)$$

(4)式所示的  $P_r(r)$  与(5)式所示的瑞利分布的概率密度函数比较,

$$P(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/(2\alpha^2)} \quad (5)$$

知  $P_r(r)$  是  $\alpha = (2\pi\lambda_0)^{-\frac{1}{2}}$  的瑞利分布<sup>[2]</sup>。

取包含点  $(x_j, y_j)$  在内的任意微小面积  $ds$ ,根据(1)式, $ds$  内存在  $n$  个泊松点的概率为:

$$P(n, ds) = \frac{(\lambda_0 ds)^n e^{-\lambda_0 ds}}{n!} \quad (7)$$

$$\text{容易证明: } P(1, ds) = \lambda_0 ds \ll \sum_{n=2}^{\infty} P(n, ds) \quad (8)$$

由于  $ds$  为任意微小面积,点  $(x_j, y_j)$  的位置可以在以  $(x_i, y_i)$  为圆心,以  $r$  为半径的圆周的任意处。设  $r_{i-j}$  与  $x$  轴夹角为  $\theta$ ,则  $\theta$  应服从于  $0 \sim 2\pi$  间的均匀分布,即有:

$$P_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (9)$$

进一步考察矢径  $r$  在  $x$  轴与  $y$  轴上的投影  $r_x$  与  $r_y$  的分布特征,由:

$$r_x = r \cos \theta, \quad r_y = r \sin \theta \quad (10)$$

为了求得  $r_x, r_y$  的概率密度函数,可以利用二维结合概率密度函数间的变换。考虑  $r$  与  $\theta$  相互独立,则  $r$  与  $\theta$  的结合概率密度函数  $P_{r,\theta}(r, \theta)$  为:

$$P_{r,\theta}(r, \theta) = P_r(r)P_\theta(\theta) = \lambda_0 r e^{-\lambda_0 \pi r^2} \quad (11)$$

$$\text{因为: } r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{r_y}{r_x} \quad (12)$$

则有:

$$\frac{\partial r}{\partial r_x} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial r_y} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r_x} = -\frac{r_y}{r_x^2 + r_y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r_y} = \frac{r_x}{r_x^2 + r_y^2} \quad (13)$$

由(13)式,可以计算二维变换的 Jacobian 行列式,得:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_x} & \frac{\partial r}{\partial r_y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r_x} & \frac{\partial \theta}{\partial r_y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} = \frac{1}{r} \quad (14)$$

利用(14)式,可以求得  $p_{xy}(r_x, r_y)$  为:

$$P_{xy}(r_x, r_y) = \frac{1}{r} P_{rs}(r, \theta) = \lambda_0 e^{-\lambda_0(r_x^2 + r_y^2)} \quad (15)$$

再由:

$$P_x(r_x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(r_x, r_y) dr_y = \sqrt{\lambda_0} e^{-\lambda_0 r_x^2} \quad (16)$$

$$P_y(r_y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(r_x, r_y) dr_x = \sqrt{\lambda_0} e^{-\lambda_0 r_y^2} \quad (17)$$

显然,  $P_x(r_x)$ 、 $P_y(r_y)$  是均值为零、方差为  $\frac{1}{2\lambda_0}$  的正态分布<sup>[2]</sup>.

设  $x = y = 0$ , 则点  $(x, y)$  表示原点. 由任意点到原点的距离成瑞利分布, 矢径与  $x$  轴的夹角成均匀分布, 利用 Monte carlo 法<sup>[3]</sup>, 可以在  $0-xy$  平面上生成泊松点.

为了验证上述方法的正确性与实用性, 本文中作了以下数值实验.

在  $0-xy$  平面上按前述方法生成足够多的泊松点, 然后随机并均匀地在平面上产生  $M$  个面积为  $S$  的圆(其它形状也可以), 并分别统计出现  $0, 1, 2, \dots, n$  个泊松点的圆的个数. 若含有  $i$  个泊松点的圆的个数为  $M_i$ , 则其概率值为  $M_i/M$ . 图1~4所表示为  $S = 1.0$  与  $S = 2.0$  时, 计算概率值与(1)式所求得理论值比较.

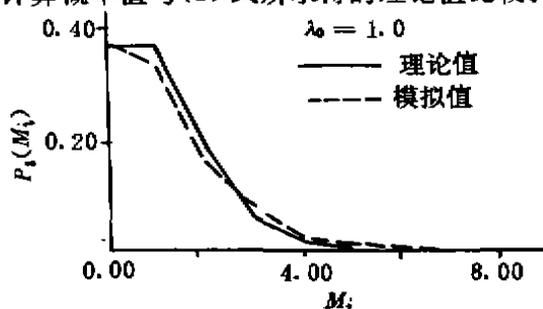


图1 模拟与理论概率值比较( $S = 1.0$ )

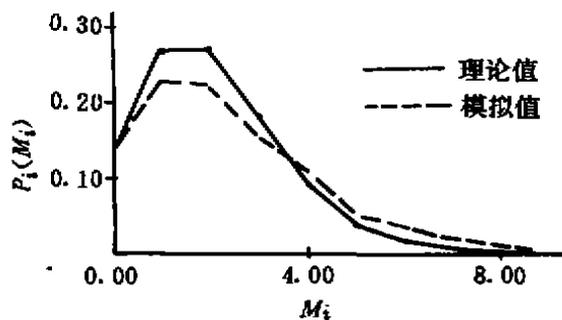


图2 模拟与理论概率值比较( $S = 1.0$ )

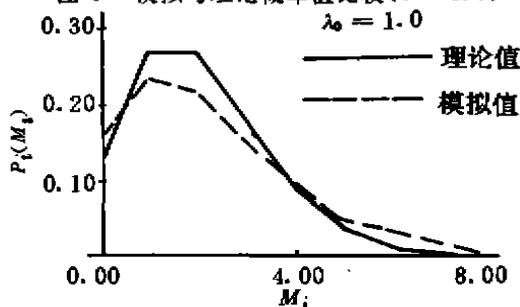


图3 模拟与理论概率值比较( $S = 2.0$ )

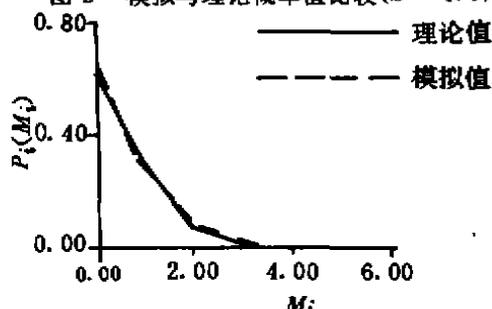


图4 模拟与理论概率值比较( $S = 1.0$ )

由以上各图所见, 理论与模拟值比较接近, 证明本文所提出的数值方法是可靠的.

## 2 路面起伏形状的数值模拟

本章主要研究复杂路面的数值模拟方法.

设路面凹凸  $Z(x, y)$  是由随机发生的、具有一定的形状而尺寸却是不确定的凹凸所重叠而

成。则  $Z_{(x,y)}$  可以用以下二维泊松滤波过程表示为：

$$Z_{(x,y)} = \sum_{i=1}^{N(x,y)} a_i W(x,y,\xi_i,\eta_i,b_i,c_i) \quad (18)$$

式中,  $N(x,y)$  表示前章所述的二维泊松过程,  $W(x,y,\xi_i,\eta_i,b_i,c_i)$  称为  $Z_{(x,y)}$  的形状函数, 它表示凹凸的基本形状, 本例的形状函数由 (19) 式表示。点  $(\xi_i,\eta_i)$  表示凹凸的起始位置, 在  $xy$  平面上服从于二维泊松分布,  $a_i, b_i, c_i$  表示凹凸的尺寸参数, 均为随机变量, 令其结合概率密度函数为  $P_{\infty}(a,b,c)$ 。

$$\begin{aligned} W(x,y,\xi_i,\eta_i,b_i,c_i) &= \sin \frac{\pi(x-\xi_i)}{b_i} \sin \frac{\pi(y-\eta_i)}{c_i} \\ &\quad (\xi_i \leq x \leq \xi_i + b_i, \eta_i \leq y \leq \eta_i + c_i) \\ &= 0 \text{ (或其它)} \end{aligned} \quad (19)$$

给定  $a_i, b_i, c_i$  的概率密度函数, 就可以利用 (18)、(19) 式模拟路面形状。由于路面凹凸不平的程度是用车轮轨迹的自谱评价的, 所以应既参照 ISO 路面谱标准, 又考虑各参数的特征, 来先取各参数的分布形式并调整其取值范围。图 5 表示模拟路面表面的一例。在本例中,  $a_i$  采用高斯分布,  $b_i$  与  $c_i$  采用离散型分布, 泊松点  $(\xi_i,\eta_i)$  则使用第一章所提出的方法生成。

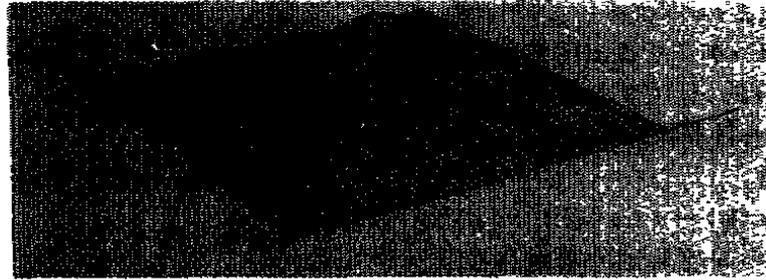


图 5 模拟路面起伏形态

参见图 5, 在模拟路面上取直线  $y = ax + \beta$ , 则车轮轨迹上的路面起伏  $Z(x)$  可表示为:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{N(x,y)} a_i \sin \frac{\pi(x-\xi_i)}{b_i} \sin \frac{\pi(ax+\beta-\eta_i)}{c_i} \quad (20)$$

$Z(x)$  的自相关函数  $R(\tau)$  由下式表示:

$$R(\tau) = E[Z(x)Z(x+\tau\cos\theta)] \quad (21)$$

(21) 式中,  $\tau$  为直线轨迹  $ax + \beta$  上的距离间隔,  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ) 是  $ax + \beta$  与  $x$  轴间的夹角。

将 (20) 式代入 (21) 式, 可以求出如下所示的车轮轨迹的自相关函数:

$$\begin{aligned} R(|\tau|) &= \frac{1}{4} \bar{a}^2 \lambda_0 \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^L P_b(b_i) P_c(c_n) \left[ \frac{b_i}{\pi} \sin \frac{\pi|\tau|\cos\theta}{b_i} \right. \\ &\quad \left. + (b_i - |\tau|\cos\theta) \cos \frac{\pi|\tau|\cos\theta}{b_i} \right] \left[ \frac{c_n}{\pi} \sin \frac{\pi|\tau|\sin\theta}{c_n} + (b_i - |\tau|\sin\theta) \cos \frac{\pi|\tau|\sin\theta}{c_n} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

令  $\theta = 0$ , 则上式可简化为:

$$R(|\tau|) = \frac{1}{4} \bar{a}^2 \lambda_0 \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^L P_b(b_i) P_c(c_n) \left[ \frac{b_i}{\pi} \sin \frac{\pi|\tau|}{b_i} + (b_i - |\tau|) \cos \frac{\pi|\tau|}{b_i} \right] \quad (23)$$

(22) 式中,  $P_s(b_s)$  与  $P_s(c_s)$  分别表示半波长  $b_s$  与  $c_s$  出现的概率。

车轮轨迹的自谱可以由(22)式的富立叶变换求得。图6为车轮轨迹  $y = 0.268x + 1.5$  的自谱,图7为模拟路面谱与 ISO DP 8608 所公布的路面谱的比较。

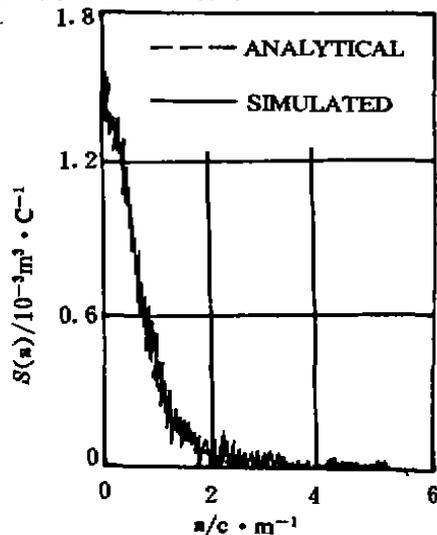


图6 1 轮轨迹  $y = 0.268x + 1.5$  的自谱

从该两图可知,本文所提出的道路起伏模型及数值模拟方法是可行的。且改变各参数的分布形式及取值范围,可以模拟各种等级道路的自谱,也说明该模型具有广泛的适用性。

若令  $b_s = c_s, p_s(b_s) = p_s(c_s)$ ,则(18)式所示的道路模型显示各向同性,车轮轨迹的自谱与参数  $\alpha$  和  $\beta$  无关。反之,若令  $b_s \neq c_s, p_s(b_s) \neq p_s(c_s)$ ,则道路自谱依  $\alpha$  的取值不同而变化,图8表示车轮轨迹  $y = 0.268x + 1.5$  与  $y = 0.577x + 1.5$  的自谱比较。

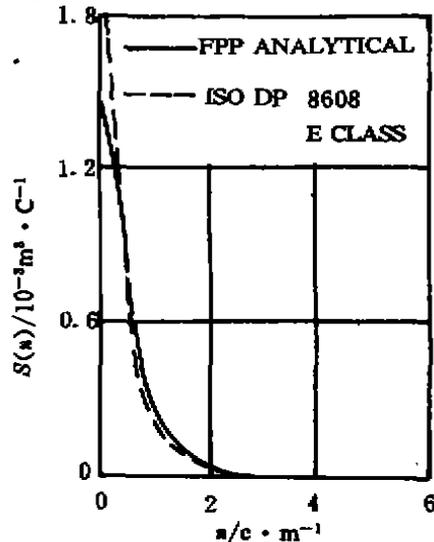
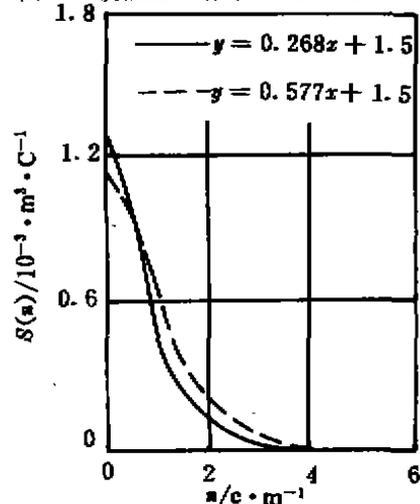


图7 模拟路面谱与 ISO 案比较



### 3 结 论

本文提出了二维泊松过程的数值模拟方法和由二图8 具有各向财性的模拟路面自谱比较维泊松滤波过程描述的道路模型。并将两者结合起来,模拟了复杂而不规则的道路表面起伏和车轮轨迹的自谱。变换该道路模型中的各参数的分布形式及取值范围,可以模拟各类路面的起伏形态,建立路面谱的数据库,对汽车开发设计有实用价值。

### 参 考 文 献

- 1 张湘伟,一维 Filtered Poisson process 路面模型及其数值模拟方法,重庆大学学报,1988,11(11):106~112
- 2 L. マゼル(佐藤平八译),概率,统计,テンダム过程,东京,森北出版株式会社,1980
- 3 津田孝夫,モンテカルロ法とシミュレーション,东京,培风馆,1988
- 4 兼重,自动车の不規則振動と道路の特性,自动车技术,1967,21(4):334~339