1994年11月 重庆大学学报 Vol.17,№.6
第17卷第6期 JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY Nov.1994

(16) 83-88

N 阶常系数线性中立型方程的强迫振动*

Forced Vibrations of the Nth-Order Linear Neutral Dealy Differential Equations with Real Constant Coefficients

周 进** 陈均平
Zhou Jin Chen Junping
(重庆大学系统工程及应用数学系,重庆,630044)

O175.

A

摘 要 应用Fourier级数理论研究n阶常系数线性中立型方程的强迫振动,得到了保证存在唯一周期解的充分必要条件,并由此得到若干简便的判别法则。本文改进和推广了文[13]的结果。

关键词 中立型方程;微分差分方程;付里叶级数理论;强迫振动
中国图书资料分类法分类号 O175.7

ABSTRACT In this paper, we make an attempt to study forced vibrations of the nth-order linear neutral delay differential equations with real constant coefficients. Sufficient and necessary conditions of the existence and uniqueness of periodic solutions for the equations are obtained by use of theory of Fourier series. Furthmore, some brief and practical critiria are given.

KEYWORDS neutral delay differential equations; difference-differential equation; theory of Fourier series; forced vibrations

0 引 言

讨论时滞方程周期解的文献已经不少(例如[1~15]),但是其中讨论具有强迫项的时滞方程振动性的文章相对说来要少得多。对于定常线性时滞方程[12][14]中作出讨论,周期解存在的充要条件归结为一个超越方程有纯虚根,使用起来也不够方便。[13]讨论了具强迫项的二阶常系数线性中立型方程

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^2x(t)\ /\ \mathrm{d}t^2 + a_1\mathrm{d}x(t)\ /\ dt + a_2x(t) + c\mathrm{d}^2x(t-h)\ /\ \mathrm{d}t^2 \\ &\quad + c_1\mathrm{d}x(t-h)\ /\ \mathrm{d}t + c_2x(t-h) = f(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 c、a_i,$c_i(i=1,2)$ 是常数,时滞 $h \geqslant 0$,$f(t)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(t) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos nt + d_n\sin nt). \tag{2}$$

文[13]得到以下定理:

---

* 收文日期 1993-11-17

** 本校系统工程及应用数学系1989年硕士研究生毕业,现在重庆工业管理学院工作

定理 设 $|c|<1/2$，则(1)存在以 2π 为周期的连续可微周期解的充分必要条件是对一切自然数 n，如下代数方程

$$(a_2+c_2)b_0=k_0,\quad p(n)b_n+q(n)l_n=k_n,\quad -q(n)b_n+p(n)l_n=d_n \tag{3}$$

关于 b_0,b_n,l_n 有解，这里

$$\begin{aligned}p(n)&=-n^2(1+c\cos nh)+nc_1\sin nh+c_2\cos nh+a_2\\ q(n)&=n^2\sin nh+n(c_1\cos nh+a_1)-c_2\sin nh.\end{aligned}\tag{4}$$

作者曾经讨论 3 阶、4 阶常系数线性时滞方程无条件稳定的代数判定(例如[17—19])，本文藉助于[13]的方法，进一步讨论三阶常系数线性中立型方程的强迫振动，得到类似的结果。由于证明过程的改进，对带最高阶时滞项系数 C 的限制放宽为 $|C|<1$，同时能进一步推广对 n 阶常系数线性中立型方程的强迫振动，给出相应的定理和简便的周期解存在的充分判别法则。因此本文改进和推广了文[13]的结果。

1 三阶常系数线性中立型方程的强迫振动

1.1 定理

考虑具有强迫项的三阶常系数线性中立型方程

$$\begin{aligned}&d^3x(t)/dt^3+a_1d^2x(t)/dt^2+a_2dx(t)/dt+a_3x(t)+cd^3x(t-h)/dt^3\\&\quad+c_1d^2x(t-h)/dt^2+c_2dx(t-h)/dt+c_3x(t-h)=f(t),\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $c,a_i,c_i(i=1,2,3)$ 为常数，时滞 $h\geqslant 0$，$f(t)$ 是以 2π 为周期的连续可微函数，其 Fourier 展开式如(2)。

定理 设 $0<|c|<1$，则(5)存在以 2π 为周期的连续可微周期解的充要条件是对一切自然数 n，下列代数方程组

$$(a_3+c_3)b_0=k_0,\quad p(n)b_n+q(n)l_n=k_n,\quad -q(n)b_n+p(n)l_n=d_n \tag{6}$$

关于 b_0,b_n,l_n 有解，其中

$$\begin{aligned}p(n)&=-(c\sin nh)n^3-(a_1+c_1\cos nh)n^2+(c_2\sin nh)n+(a_3+c_3\cos nh),\\ q(n)&=-(1+c\cos nh)n^3+(c_1\sin nh)n^2+(a_2+c_2\cos nh)n-c_3\sin nh.\end{aligned}\tag{7}$$

证 必要性 设 $x(t)$ 是方程(5)的以 2π 为周期的连续可微周期解，其 Fourier 展开式为

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt+l_n\sin nt)\tag{8}$$

由(8)计算出 $dx(t)/dt$ 及 $d^2x(t)/dt^2$ 代入方程(5)可得

$$\begin{aligned}&(a_3+c_3)b_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(p(n)b_n+q(n)l_n)\cos nt+(-q(n)b_n+p(n)l_n)\sin nt]\\&=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos nt+d_n\sin nt)\end{aligned}\tag{9}$$

比较(9)两端系数便得到代数方程组(6)，此即表明对一切自然数 n，(6)应当关于 b_0,b_n,l_n 有解，必要性得证。

充分性 设(6)关于 b_0,b_n,l_n(对一切自然数 n)有解，于是可以构造如下三个三角级数

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt+l_n\sin nt),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-nb_n\sin nt+nl_n\cos nt),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2b_n\cos nt-n^2l_n\sin nt).\tag{10}$$

我们证明(10) 绝对收敛和一致收敛，从而得到(5) 的以 2π 为周期的连续可微周期解为(8)。

事实上，由 $0<|c|<1$，便有

$$|q(n)|\geqslant(1-|c|)n^3-|c_1|n^2-(|a_2|+|c_2|)n-|c_3|\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

$$\text{故得}\ \lim_{n\to+\infty}n^2/|q(n)|=0,\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2|p(n)|}{q^2(n)}=0.\tag{11}$$

因此对任给正数 M，必存在充分大的自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{n^2|p(n)|}{q^2(n)}<M/2,\qquad n^2/|q(n)|<M/2.\tag{12}$$

由(6) 的解

$$\begin{aligned}b_n&=(p(n)k_n-q(n)d_n)/(p^2(n)+q^2(n)),\\ l_n&=(q(n)k_n+p(n)d_n)/(p^2(n)+q^2(n)),\end{aligned}\tag{13}$$

可得以下不等式：当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}n^2(|b_n|+|l_n|)&\leqslant n^2(|b_n|+|q_n|)(|k_n|+|d_n|)/(p^2(n)+q^2(n))\\&\leqslant(n^2|p(n)|/q^2(n)+n^2/|q(n)|)(|k_n|+|d_n|)\\&<M(|k_n|+|d_n|)\leqslant\frac{M}{2n^2}+M(|nk_n|^2+|nd_n|^2).\end{aligned}\tag{14}$$

nk_n，nd_n 是 $f'(t)$ 的 Fourier 系数，由 Parseval 公式[16] 可得

$$\sum_{n=N}^{m}(|nk_n|^2+|nd_n|^2)\leqslant1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}(f'(t))^2\mathrm{d}t<+\infty\qquad(m=N,N+1,\cdots).\tag{15}$$

(15) 表明 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(|nk_n|^2+|nd_n|^2)$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(1/2n^2)$ 收敛，故 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(|b_n|+|l_n|)$ 收敛，再由

$$\begin{aligned}&|b_n\cos nt+l_n\sin nt|\leqslant|b_n|+|l_n|\leqslant n^2(|b_n|+|l_n|)\\&|nb_n\sin nt+nl_n\cos nt|\leqslant n(|b_n|+|l_n|)\leqslant n^2(|b_n|+|l_n|)\\&|n^2b_n\cos nt+n^2l_n\sin nt|\leqslant n^2(|b_n|+|l_n|)\end{aligned}$$

故知(10) 所表示的三个三角级数都是绝对收敛和一致收敛的，从而可以验证(8) 所表示的级数是方程(5) 的以 2π 为周期的连续可微的周期解。证毕。

1.2　判别法则　由 1.1 段的定理可得

法则 1　设 $0<|c|<1$，则(5) 存在唯一的以 2π 为周期的连续可微周期解的充要条件是：　$a_3+c_3\neq0$，　$p^2(n)+q^2(n)\neq0\quad(n=1,2,\cdots)$　(16)

注：法则 1 需要对一切自然数 n 检查(16) 成立。若令

$$\lambda^*=(|c_1|+\sqrt{|c_1|^2+3(1-|c|)(|a_2|+|c_2|)})/3(1-|c|)\tag{17}$$

并记$[\lambda^*]$为表示不超过 λ^* 的最大正整数，则有以下

法则 2　设 $0<|c|<1$，则(5) 存在唯一的以 2π 为周期的连续可微周期解的充要条件是：

$$a_3+c_3\neq0,\quad p^2(n)+q^2(n)\neq0\quad(n=1,2,\cdots,[\lambda^{**}]),\tag{18}$$

其中$[\lambda^{**}]$是不超过 λ^{**} 的正整数，λ^{**} 是方程

$$(1-|c|)\lambda^3-|c_1|\lambda^2-(|a_2|+|c_2|)\lambda-|c_3|=0$$

的正实根。

证　因为当 $0<|c|<1$ 时，

$$|q(n)| \geqslant (1-|c|)n^3 - |c_1|n^2 - (|a_2|+|c_2|)n - |c_3| \to +\infty \quad (n \to +\infty). \tag{19}$$

令

$$F(\lambda) = (1-|c|)\lambda^3 - |c_1|\lambda^2 - (|a_2|+|c_2|)\lambda - |c_3| \tag{20}$$

方程 $F'(\lambda)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 具有唯一正实根 λ^*，从而 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda^*$ 时取极小值。$F(\lambda)$ 在 $(0,\lambda^*)$ 单调减少，而在 $(\lambda^*,+\infty)$ 单调增加，又因 $F(0)=-|c_3|\leqslant 0$，因此方程 $F(\lambda)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 具有唯一正实根 $\lambda^{**}\geqslant\lambda^*$。因此，在 $(\lambda^{**},+\infty)$ 内，$q(n)\neq 0$，从而只需验证当 $n=1,2,\cdots,[\lambda^{**}]$ 时，(18) 成立。

法则 3　设 $0<|c|<1$，则当

$$a_3+c_3\neq 0,\qquad |a_2|+|c|+\sum_{i=1}^{3}|c_i|<1 \tag{21}$$

时(5)存在以 2π 为周期的连续可微周期解。

证　因 $f(0)=-|c_3|\leqslant 0$，当　$F(1)=1-|c|-\sum_{i=1}^{3}|c_i|-|a_2|>0$

时便有 $F'(\lambda)=0$ 的唯一正实根 $\lambda^{**}<1$，由法则 2，即知法则 3 成立。

例　考虑中立型方程

$$\mathrm{d}^3x(t)/\mathrm{d}t^3 - 5\mathrm{d}^2x(t)/\mathrm{d}t^2 + 1/4\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t + 1/4x(t) + 1/8\mathrm{d}^3x(t-h)/\mathrm{d}t^3$$
$$- 1/8\mathrm{d}^2x(t-h)/\mathrm{d}t^2 + 1/8\mathrm{d}x(t-h)/\mathrm{d}t + 1/4x(t-h) = \sin t \tag{22}$$

方程(22)的系数满足法则 3 的条件，故一定存在以 2π 为周期的连续可微周期解。

2　N 阶线性常系数中立型方程的强迫振动

2.1　定理

考虑带强迫项的 n 阶线性常系数中立型方程

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\mathrm{d}^{(n-i)}x(t)/\mathrm{d}t^{n-i} + c_i\mathrm{d}^{(n-i)}x(t-h)/\mathrm{d}t^{n-i}\right] = f(t) \tag{23}$$

其中 $a_o\neq 0, a_i, c_i (i=0,1,2,\cdots,n)$ 是常数，时滞 $h\geqslant 0$，强迫项 $f(t)$ 是 n 次连续可微的以 2π 为周期的函数，其 Fourier 展开式为

$$f(t) = k_o + \sum_{m=1}^{+\infty}(k_m\cos mt + d_m\sin mt) \tag{24}$$

定理　设 $|c_o|<|a_o|$，则(23)存在唯一的以 2π 为周期的连续可微周期解的充要条件是下面的代数方程

$$(a_n+c_n)b_o = k_o,\quad p(m)b_m + q(m)l_m = k_m,\quad -q(m)b_m + p(m)l_m = d_m \tag{25}$$

对一切正整数 m 关于 b_o, b_m, l_m 有解，其中

$$p(m) = \sum_{i=0}^{n}\left[a_i\cos(n-i)\pi/2 + C_i\cos(mh-(n-i)\pi/2)\right]m^{n-i},$$

$$q(m) = \sum_{i=0}^{n}\left[a_i\sin(n-i)\pi/2 - C_i\sin(mh-(n-i)\pi/2)\right]m^{n-i}.$$

证　必要性与 1.1 段定理的证明类似，从略。

充分性　设方程(25)对一切自然数 m，关于 b_o, b_m, l_m 有解，便可构造如下 n 个三角级数

$$b_o + \sum_{m=1}^{\infty}(b_m\cos mt + l_m\sin mt)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}[m^i\cos(mt+i\pi/2)+m^i l_m\sin(mt+i\pi/2)\quad(i=1,2,\cdots,n-1).\tag{26}$$

我们证明(25) 所表示的级数绝对收敛且一致收敛。

当 $n=2s$(s 为自然数) 时，

$$\begin{aligned}p(m)&=(-1)^s(a_1+c_s\cos mh)^{2s}\\&\quad+\sum_{i=1}^{2s}[a_i\cos(n-i)\pi/2+C_i\cos(mh-(n-i)\pi/2)]m^{2s-i},\\q(m)&=(-1)^{s-1}(\sin mh)m^{2s}\\&\quad+\sum_{i=1}^{2s}[a_i\sin(n-i)\pi/2-C_i\sin(mh-(n-i)\pi/2)]m^{2s-i}.\end{aligned}\tag{27}$$

当 $|c_s|<|a_s|$ 时，

$$|p(m)|\geqslant(|a_s|-|c_s|)m^{2s}$$

$$-\sum_{i=1}^{2s}[|a_i|(1+(-1)^i)/2+|c_i|]m^{2s-1}\to+\infty(m\to+\infty).\tag{28}$$

从而　$$\lim_{m\to+\infty}m^{2s-1}/|p(m)|=0,\quad\lim_{m\to+\infty}m^{2s-1}|q(m)|/p^2(m)=0.\tag{29}$$

当 $n=2s+1$ 时，

$$p(m)=(-1)^{s+1}(\sin mh)m^{2s+1}$$

$$+\sum_{i=1}^{2s+1}[a_i\cos(n-i)\pi/2+c_i\cos(mh-(n-i)\pi/2)]m^{2s+1-i},\tag{30}$$

$$q(m)=(-1)^s[a_s+c_s\cos mh]m^{2s+1}$$

$$+\sum_{i=1}^{s}[a_i\sin(n-i)\pi/2-C_i\sin(mh-(n-i)\pi/2)]m^{2s+1-i}.\tag{31}$$

当 $|c_s|\leqslant|a_s|$ 时，

$$|q(m)|\geqslant(|a_s|-|c_s|)m^{2s+1}$$

$$-\sum_{i=1}^{2s+1}[|a_i|(1+(-1)^i)/2+|c_i|]m^{2s+1-i}\to+\infty\qquad(m\to+\infty).\tag{32}$$

从而有：

$$\lim_{m\to+\infty}m^{2s}/|q(m)|=0,\qquad\lim_{m\to+\infty}m^{2s}|p(m)|/q^2(m)=0.\tag{33}$$

故不论 n 为奇数或偶数，对正数 M 总存在 N，当 $m>N$ 时，

$$\begin{aligned}m^{n-1}(|b_m|+|l_m|)&\leqslant m^{n-1}/(p^2(m)+q^2(m))(|p(m)|+|q(m)|)(|k_m|+|d_m|)\\&<M(|k_m|+|d_m|)\leqslant M/(2m^2)+M(|mk_m|^2+|md_m|^2)\qquad(\text{当 } m>N)\end{aligned}\tag{34}$$

利用 Parsevel 不等式[16]可证

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(|mk_m|^2+|md_m|^2)\tag{35}$$

收敛，从而

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{n-1}(|b_m|+|l_m|)\tag{36}$$

收敛，由此可知(26) 所表示的 n 个三角级数绝对收敛及一致收敛，不难直接验证

$$x(t)=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}(b_m\cos mt+l_m\sin mt)\tag{37}$$

是(23)的以 2π 为周期的连续可微周期解。证毕。

当 $m=2$ 时，本定理即是文[13]的结果，但是对 $C=C_0/a_0$ 的限制已放宽为 $|C|<1$.

2.2 判别法则

由上述定理可得以下充分判别法则

法则 1 设 $|c_0|<|a_0|$，则(23)存在唯一的以 2π 为周期的连续可微周期解的充要条件是

$$a_0+c_0\neq 0,\qquad p^2(m)+q^2(m)\neq 0,\qquad (m=1,2,\cdots) \tag{38}$$

法则 2 设 $|c_0|<|a_0|$，$a_0+c_0\neq 0$，若方程

$$F(\lambda)=(|a_0|-|c_0|)\lambda^n-\sum_{i=1}^{n}[|a_i|(1+(-1)^i)/2+|c_i|]\lambda^{n-i}=0 \tag{39}$$

的唯一正根 λ^*，使得 $p^2(m)+q^2(m)\neq 0,(m=1,2,\cdots,[\lambda^*])$ (40)

成立，则方程(23)存在以 2π 为周期的连续周期解。

法则 3 设 $|c_0|<|a_0|$，$a_0+c_0\neq 0$，若下列不等式

$$\sum_{i=1}^{n}[|a_i|(1+(-1)^i)/2+|c_i|]<|a_0|-|c_0| \tag{41}$$

成立，则方程(23)存在以 2π 为周期的连续可微周期解。

在本文中，若 $f(t)$ 是以 $2T$ 为周期的连续可微函数，可作完全类似的讨论。

参 考 文 献

1 王志成. 中立型方程 $d/dt[x(t)+px(t-\tau)]+qx(t-\tau)+hx(t)]=0$ 振动的充要条件，科学通报. 1988，(19)：1452～1454

2 周德堂. 一阶泛函方程振动性的一些结果. 科学通报，1988，(22)：1754

3 张炳根. 二阶中立型微分方程解的振动性. 科学通报. 1989，(8)：563～566

4 张炳根. 中立型方程的强迫振动. 科学通报，1989，(8)：1845

5 王建文. 一阶中立型泛函微分方程振动的比较定理，科学通报，1989，(2)：157

6 俞元洪. 一阶中立型时滞微分方程解的振动性. 科学通报，1989，(2)：159

7 王开逊. 一类 n 阶非线性中立型泛函微分方程解的振动性. 1989，(2)：474

8 庾建设. 二阶中立型微分方程解的振动性. 科学通报. 1989，(22)：1754

9 王志成，庾建设. 一阶中立型时滞微分方程的振动性. 科学通报，1990，(10)：797

10 冯月才. 有强迫项的高阶非中立型泛函微分方程解的振动性. 科学通报，1990，(13)：1037

11 张炳根. 具有时滞的直接控制系统的振动性. 科学通报，1990，(13)：1037

12 秦元勋，刘永清，王联，郑祖庥. 带有时滞的动力系统的运动稳定性(第二版). 科学出版社，1989

13 章毅，张毅. 关于二阶常系数中立型方程的周期解. 数学学报，1990，33(4)：516～520

14 R. Bellman & K. L. Cooke. Differential-Difference Equations. Academic Press，New York，1963

15 J. K. Hale. Theory of Functional Equations，Springer-Uerlag，New York，1977

16 陈建功. 实函数论. 科学出版社，1978

17 陈均平，周进. 三阶常系数线性滞后型方程无条件稳定的代数判定. 重庆大学学报，1990，13(6)：54～56

18 Chen Junping and Li Zhiyong. The Sufficient and Necessary Conditions of Unconditional Stability and the Delay Bound of the Third-order Neutral Delay Differential Equation. Applied Mathematics and Mechanics，1991，7(12)：681～685

19 Chen Junping，Zhou Jin and Li Zhiyong. Unconditional Stability and Delay Bound for Fourth-Order Neutral Delay Differential Equation，Annals of Differential Equations，1993，9(1)：1～10