1995 年 3 月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol. 18, №. 2
第 18 卷第 2 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Mar. 1995

# 拟正则图的最大线图连通度及其应用*

# The Maximum Connectivity of the Line Graph over Quasi-regular Graphs and Its Application

21-26

何中市 杨晓帆 陈四清
He Zhongshi Yang Xiaofan Chen Siqing
(重庆大学计算机研究所，重庆，630004)

**摘 要** 引入了拟正则 $(p,q)$ 图的最大线图连通度 $R(p,q)$，得到上、下界至多相差 1 的 $R(p,q)$ 的取值范围：$2m-2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m-2+[2\frac{mr+r}{mp+r}]$，其中 $m=[2q/p]$，$r=(2q)\mathrm{mod}p$. 将此结果应用于容错多总线系统的最优设计，提出了两类最优容错设计，推广了已有结果；并揭示出当处理机个数相对于总线条数较大时最优容错设计的广泛存在性。

**关键词** 图连通性；容错技术/拟正则图；线图；多总线系统

**中国图书资料分类法分类号** TP3；O157.5；O157.9

**ABSTRACT** The maximum connectivity $R(p,q)$ of the line graph over quasi-regular(p, q)graphs is discussed. A bound on $R(p,q)$: $2m-2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m-2+[2\frac{mr+r}{mp+r}]$ is presented, where $m=[2q/p]$, $r=(2q)\mathrm{mod}p$. Further, two classes of fault tolerant multibus systems are proposed. As a result, the previous results are generalized; meanwhile, the wide-ranging existence of the optimal fault tolerant design is revealed when the number of processors / the number of buses is large.

**KEYWORDS** connectivity of graph; fault tolerant_technique / quasi-regular graphs; lineg raph; multibus system

## 0 引 言

拟正则 $(p,q)$ 图的最大线图连通度问题本身是一个图论问题，但它在计算机网络可靠性分析与设计中具有十分重要的应用。

关于容错多总线多处理机系统（简称多总线系统）的最优设计（一般应包含总线容错度 $T_b$、处理机容错度 $T$，同时最优）问题，一般情形远未解决。文献[1] 揭示了它与图的最大线图连通度的关系，陈述槐等[2] 引入了弱区组设计（WBIB），结合超图连通性不等式给出了一些特殊情形下的最优设计；何中市等[3] 利用二元图的最佳连通性解决了一般情形下的最优 $T_b$

* 收文日期 1994-09-01
国家自然科学基金资助项目

设计。至今最优 $T_r$ 设计未能完全解决，就连每个处理机具有两个端口($\delta_r = 2$)的情形都未能完全解决。本文作者就 $\delta_r = 2$ 的情形，通过拟正则$(p,q)$图的最大线图连通度给出了最优(较优)$T_r$ 设计，且在此设计下，$T_r$ 达到最优。

本文得到一般情形即对任意的正整数 $p,q$，拟正则$(p,q)$图的最大线图连通度的若干结果。并将此结果应用于容错多总线系统的最优设计，提出了两类最优设计 MBS$(n_b,n_r)$-Ⅰ 和 MBS$(n_b,n_r)$-Ⅱ，既推广了文献[2]的部分结果，又揭示出当 $n_r$ 相对于 $n_b$ 较大时最优设计的广泛存在性。

## 1 拟正则$(p,q)$图的最大线图连通度

拟正则$(p,q)$图是一类图：具有 $p$ 个顶点、$q$ 条边的拟正则图(拟正则是指每个顶点度至多相差 1)。设 $R(p,q)$ 表示拟正则$(p,q)$图的最大线图连通度，即：

$$R(p,q) = \max_{G}\{\kappa_L = \kappa(L(G)):G \text{ 为拟正则}(p,q)\text{ 图}\} \tag{1}$$

其中 $L(G)$ 表示图 $G$ 的线图，$\kappa(L(G))$ 表示 $L(G)$ 的连通度。

为了得到 $R(p,q)$，需要引用如下引理：

**引理 A**[4] 设 $G$ 是$(p,q)$图，它的顶点度序列为 $d_1,\cdots,d_p$，则 $G$ 的线图 $L(G)$ 有 $q$ 个顶点和 $q_L$ 条边，其中

$$q_L = -q + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i^2$$

关于 $R(p,q)$ 的上界，有如下定理：

**定理 1** 对于任意的两个正整数 $p$、$q$ 有

$$R(p,q) \leqslant 2m - 2 + \left[2\frac{mr+r}{mp+r}\right]$$

其中 $m = [2q/p]$，$r = (2q)\bmod p$($2q$ 关于 $p$ 的模)，$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数。

证 由 $m = [2q/p]$，$r = (2q)\bmod p$ 得

$$2q = mp + r \tag{2}$$

设 $G$ 为任意一个拟正则$(p,q)$图，则 $G$ 的顶点度至多相差 1，故按非减次序排列，$G$ 的顶点度序列为：

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_{p-r} = m;\quad d_{p-r+1} = d_{p-r+2} = \cdots = d_p = m+1$$

由此即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} d_i^2 &= \sum_{i=1}^{p-r} d_i^2 + \sum_{i=p-r+1}^{p} d_i^2 = m^2\cdot(p-r) + (m+1)^2\cdot r\\ &= m^2p + 2mr + r\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} d_i^2/q &= 2(m^2p + 2mr + r)/(2q)\\ &= 2((m^2p + mr) + (mr + r))/(mp + r)\\ &= 2m + 2\frac{mr+r}{mp+r}\end{aligned}$$

由引理 A 知 $L(G)$ 的顶点平均度 $\bar{d}_L$ 为：

$$\bar{d}_L = 2q_L/q = (-2q + \sum_{i=1}^{p} d_i^2)/q = -2 + 2m + 2\frac{mr+r}{mp+r}$$

即

$$\bar{d}_L = 2m - 2 + 2\frac{mr+r}{mp+r}$$

从而 $L(G)$ 的顶点最小度 $\delta_L = \delta(L(G))$ 满足：

$$\delta_L = \delta(L(G)) \leqslant [\bar{d}_L] = 2m - 2 + [2\frac{mr+r}{mp+r}]$$

再由 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$ 知 $\kappa_L = \kappa(L(G)) \leqslant \delta(L(G)) = \delta_L$

即得　$\kappa_L = \kappa(L(G)) \leq 2m - 2 + [2\frac{mr+r}{mp+r}]$

由 $G$ 的任意性，结合(1)式即有

$$R(p,q) \leqslant 2m - 2 + [2\frac{mr+r}{mp+r}]$$

从而定理 1 得证。

为了得到 $R(p,q)$ 的较好下界，下面引进具有 $p$ 个顶点、$q$ 条边的一般哈拉里图 $H[p,q]$：$H[p,q]$ 是在基本哈拉里图 $H_{m,p}$(其中 $m = [2q/p]$) 中，任意地添加余下的 $[r/2]$ 条边而得到的简单图[6]。显然 $H[p,q]$ 属于 $(p,q)$ 图。关于 $H[p,q]$ 的线图连通度有：

**引理 $B^*$**　对于任意的正整数 $p$、$q$：$p \leqslant q \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$，一般哈拉里图 $H[p,q]$ 的线图连通度 $\kappa_L$ 满足：$\kappa_L \geqslant 2m - 2$. 其中 $m = [2q/p]$.

结合定理 1，关于 $R(p,q)$ 有如下定理：

**定理 2**　对于任意的正整数 $p$,$q$：$q \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$，记 $m = [2q/p]$，$r = (2q)\bmod p$. 有

$$2m - 2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m - 2 + [2\frac{mr+r}{mp+r}] \tag{3}$$

1) 若 $m = 0$，则

$$R(p,q) = 0 \tag{4}$$

2) 若 $m \geqslant 1$，且 $0 \leqslant r < \frac{m}{2m+1}p$，则　$R(p,q) = 2m - 2$　(5)

3) 若 $m \geqslant 1$，且 $\frac{m}{2m+1}p \leqslant r < p$，则　$2m - 2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m - 1$　(6)

证　分 $q \geqslant p$ 和 $q < p$ 两种情况证明定理成立：

1°　当 $q \geqslant p$ 时

存在一个 $(p,q)$ 图 $G$：$G = H[p,q]$，此处只要求 $H[p,q]$ 为拟正则的即可。这样的一般哈拉里图 $H[p,q]$ 是存在的，只要在基本哈拉里图 $H_{m,p}$ 中均匀地添边，由于 $H_{m,p}$ 是正则或拟正则的，故添边后，仍能保证 $H[p,q]$ 为拟正则的。

由引理 $B$ 有 $\kappa_L \geqslant 2m - 2$ 成立，再由(1)式知 $R(p,q) \geqslant 2m - 2$，结合定理 1 有(3)式成立。

由 $q \geqslant p$ 及 $m = [2q/p]$ 知 $m \geqslant 2$

1) 若 $0 \leqslant r < \frac{m}{2m+1}p$，

* Chen Siqing et al. The optimal fault tolerant multibus architecture，已投国际容错会议

则有 $0 \leqslant 2mr + r < mp$,从而 $0 \leqslant 2mr + 2r < mp + r$
得

$$0 \leqslant \frac{2mr + 2r}{mp + r} < 1, \text{故} \left[2\frac{mr + r}{mp + r}\right] = 0$$

由(3)式即得 $R(p,q) = 2m - 2$,从而(5)式成立。

2) 若 $\frac{m}{2m + 1}p \leqslant r < p$,

则有

$$1 \leqslant 2\frac{mr + r}{mp + r} < 2, \text{从而} \left[2\frac{mr + r}{mp + r}\right] = 1$$

由(3)式即得 $2m - 2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m - 1$,即(6)式成立。

2° 当 $q < p$ 时

有 $0 \leqslant m = [2q/p] \leqslant 1$(因 $2q/p < 2$)。由定理 1 有(3)式成立,并且:

1) 若 $m = 0$,

则有 $R(p,q) \leqslant 0$,即 $R(p,q) = 0$ 得证(4)式。

2) 若 $m = 1$,且 $0 \leqslant r < \frac{m}{2m + 1}p$,

则有 $\left[2\frac{mr + r}{mp + p}\right] = 0$. 得 $R(p,q) \leqslant 0$,亦有 $R(p,q) = 2m - 2 = 0$ 成立,即(5)式成立。

3) 若 $m = 1$,且 $\frac{m}{2m + 1}p \leqslant r < p$,

则有 $\left[2\frac{mr + r}{mp + r}\right] = 1$,从而得 $R(p,q) \leqslant 1$,即 $0 \leqslant R(p,q) \leqslant 1$,亦即

$$2m - 2 \leqslant R(p,q) \leqslant 2m - 1$$

成立,亦有(6)式成立。

定理 2 给出了 $R(p,q)$ 的取值,在 1)、2) 两种情形,$R(p,q)$ 由 $p,q$ 唯一确定;而在 3) 这种情形,$R(p、q)$ 虽不能被唯一确定,但 $R(p,q)$ 必为 $2m - 2$ 或 $2m - 1$ 二者之一,它们相差为 1,已能很好地解决容错多总线系统的最优设计。下面便利用以上结果,提出容错多总线系统的最优设计。

## 2 应用——容错多总线系统的最优设计

下面给出 $\delta_p = 2$ 即每个处理机端口数为 2 时、对于任意给定的总线条数 $n_b$、处理机个数 $n_p$($n_b \leqslant n_p \leqslant \frac{n_b(n_b-1)}{2}$)的最优容错多总线系统。

鉴于系统对通信延迟小的要求,设计的多总线系统应有均衡结构,即每条总线挂接的处理机数最多相差 1,此类多总线系统称为均衡多总线系统,记为 MBS($n_b$,$n_p$)。

对于均衡多总线系统 MBS($n_b$,$n_p$),若把其总线集作为图的顶点集;因每个处理机挂接两条总线,故处理机可作为边,这样构成图 $G$,则 $G$ 为具有 $n_b$ 个顶点、$n_p$ 条边的拟正则图,即 $G$ 为拟正则($n_b$,$n_p$)图。于是 MBS($n_b$,$n_p$) 与一个拟正则($n_b$,$n_p$)图 $G$ 一一对应,且其处理机容错度 $T_p$ 与图 $G$ 的线图连通度 $\kappa_L$ 有如下关系:

$$T_p = \kappa_L - 1 \qquad (7)$$

所以 $MBS(n_b,n_p)$ 的最优 $T_r$ 设计问题等价于拟正则 $(n_b,n_p)$ 图的 $\kappa_L$ 最大设计问题。

下面利用本文作者得到的有关结果，给出 $MBS(n_b,n_p)$ 的两类最优 $T_r$ 设计。

### 2.1 第一类最优设计 MBS$(n_b,n_p)$-Ⅰ

利用定理 2 的结果，本文给出的第一类最优设计 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅰ 如下：

在拟正则 $(n_b,n_p)$ 图中，选取 $G$ 为拟正则哈拉里图，即 $G=H[n_b,n_p]$，则 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅰ 由 $G$ 唯一确定。由引理 $B$ 知：

$$\kappa_L=\kappa(L(G))\geqslant 2m-2$$

其中 $m=[2n_p/n_b]$，$r=(2n_p)\bmod n_b$。

因 $n_b\leqslant n_p\leqslant\frac{n_b(n_b-1)}{2}$，故 $m\geqslant 2$，由定理 2 有：

1) 当 $0\leqslant r<\frac{m}{2m+1}n_b$ 时，则有 $R(n_b,n_p)=2m-2$，

而此时：$\kappa_L\geq 2m-2$，且 $\kappa_L\leqslant R(n_b,n_p)$，故知 $\kappa_L=2m-2=R(n_b,n_p)$。即所构造的拟正则哈拉里图 $H[n_b,n_p]$、其线图连通度 $\kappa_L$ 达到最大。由(7)式，亦即相应的 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅰ 的处理机容错度 $T_r$ 达到最优值。

注：文献[2] 给出的 $\delta_r=2$ 的最优设计相当于如下情形：$n_b=2k$ 为偶数，$n_p=\frac{1}{4}n_b^2$，即：

$m=[2n_p/n_b]=[\frac{1}{2}n_b]=k$，$r=(2n_p)\bmod n_b=0$。它为上述一般情形的一部分。

2) 当 $\frac{m}{2m+1}n_b\leqslant r<n_b$ 时，则有 $2m-2\leqslant R(n_b,n_p)\leqslant 2m-1$，

由 $\kappa_L\geqslant 2m-2$ 及 $\kappa_L\leqslant R(n_b,n_p)$ 知 $0\leqslant R(n_b,n_p)-\kappa_L\leqslant 1$。即由拟正则哈拉里图 $H[n_b,n_p]$ 给出的 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅰ 设计的 $T_r$ 与最优值至多相差 1。

### 2.2 第二类最优设计 MBS$(n_b,n_p)$-Ⅱ

本文作者在另一文中给出了如下结论：

**引理 $C$*** 对 $n$ 个顶点的任意拟正则简单图 $G$，若 $\delta=\delta(G)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$，则

$$2\delta-2\leqslant\kappa_L\leqslant 2\delta-1$$

下面便利用引理 $C$ 给出第二类最优设计 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅱ 如下：

$$m=[2n_p/n_b],\quad r=(2n_p)\bmod n_b,(0\leqslant r<n_b)$$

1) 若 $m\leqslant\left[\frac{n_b}{2}\right]$，则 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅱ 与 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅰ 相同。

2) 若 $m\geqslant\left[\frac{n_b}{2}\right]+1$，则 $MBS(n_b,n_p)$-Ⅱ 可以由任意一个简单拟正则 $(n_b,n_p)$ 图 $G$ 确定。

因为：对于任意的简单拟正则 $(n_b,n_p)$ 图 $G$，有

$$\delta=\delta(G)=m\geqslant\left[\frac{n_b}{2}\right]+1=\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

由引理 $C$ 知　$2\delta-2\leqslant\kappa_L\leqslant 2\delta-1$，亦即

$$2m-2\leqslant\kappa_L\leqslant 2m-1\tag{8}$$

而结合定理 2：

① 当 $0\leqslant r<\frac{m}{2m+1}n_b$ 时，有 $R(n_b,n_p)=2m-2$

---

* 何中市等.线图连通度的界.已被重庆大学学报录用.

由(8)式知 $\kappa_L = 2m - 2 = R(n_b, n_p)$。即由 $G$ 确定的 MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ 的 $T_f$ 达到最优值.

② 当 $\frac{m}{2m+1}n_b \leqslant r < n_b$ 时，有 $2m - 2 \leqslant R(n_b, n_p) \leqslant 2m - 1$

由(8)式可得 $0 \leqslant R(n_b, n_p) - \kappa_L \leqslant 1$. 故由 $G$ 确定的 MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ 的 $T_f$ 与最优值至多相差 1.

MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ 的特点是：当 $n_p$ 相对于 $n_b$ 较大时，即 $m = [2n_p/n_b] \geqslant [n_b/2] + 1$ 时，MBS($n_b, n_p$) − Ⅱ 可以由任何一个简单拟正则($n_b, n_p$)图 $G$ 来实现，它们都能保证 $T_f$ 达到最优或与最优值至多相差 1. 揭示了最优(较优)$T_f$ 设计的广泛存在性，从而为其它指标的优化设计提供了更大的灵活性。

注：① 易证，上面给出的容错多总线系统的最优设计 MBS($n_b, n_p$)-Ⅰ 和 MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ 在 $T_f$ 最优(较优)的同时，$T_b$ 达到最优。

② 对于 $n_p > \frac{n_b(n_b-1)}{2}$ 的情形，虽然($n_b, n_p$)图不可能是简单图，但其最优设计可以采用 $\mu$ 重 $n_b$ 阶完全图与拟正则一般哈拉里图 $H[n_b, n_b']$ 的迭加构造拟正则图 $G$，其中：

$$\mu = \left\{\frac{2n_p}{n_b(n_b-1)}\right\} - 1, n_b' = n_p \mathrm{mod}\left(\frac{n_b(n_b-1)}{2}\right)$$

可以证明，由 $G$ 给出的多总线系统 MBS($n_b, n_p$)-Ⅰ、Ⅱ 亦具有最优(较优)容错性。

## 3 结 论

本文就任意正整数 $p$、$q$，给出了拟正则($p, q$)图的最大线图连通度 $R(p, q)$ 的若干结果。并将此结果与作者在另一文中给出的结果应用于容错多总线系统的最优设计。对 $\delta_p = 2$ 的情形，针对任意的正整数 $n_b$、$n_p$：$n_b \leqslant n_p \leqslant \frac{n_b(n_b-1)}{2}$，得到了两类最优(较优)容错设计

MBS($n_b, n_p$)-Ⅰ 和 MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ.

它们不仅部分地推广了文献[2]中的有关结果；特别是 MBS($n_b, n_p$)-Ⅱ，还揭示出了当 $n_p$ 相对于 $n_b$ 较大时，最优(较优)容错设计的广泛存在性——仅要求相应的图为拟正则简单图即可。为在最优容错性基础上，寻求其它指标的优化提供了广泛的选择范围。

### 参 考 文 献


1 D K Pradhan. Fault-tolerant multiprocessor link and bus network architecture. IEEE Trans. Computer, 1985, 34(1): 33 ~ 45

2 陈廷槐，康泰，姚荣. 超图的连通性及容错多总线系统的设计. 中国科学 A 辑，北京：科学出版社，1987, 17(12): 1309 ~ 1319

3 何中市，杨晓帆，陈四清，陈廷槐. 多总线系统的最优总线容错性分析与设计. 重庆大学学报，重庆：重庆大学出版社，1995, 18(1): 1 ~ 5

4 F 哈拉里著. 李慰萱译. 图论. 上海：上海科学技术出版社，1982: 51 ~ 66

5 F T Boesch. Synthesis of Reliable Networks-A Survey. IEEE Trans. Reliability, 1986, 35(3): 240 ~ 246