

1 频率校正法(比值法)

频率校正即求出主瓣中心的横坐标。设窗函数的频谱函数为 $f(x)$, $f(x)$ 是对称于 Y 轴的

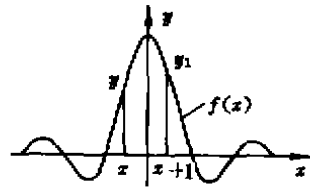


图2 窗函数的频谱函数

(图2)。已知 $y = f(x)$, $y_1 = f(x+1)$, 要由 y 和 y_1 求出 x , 即求解谱线修正量 $\Delta x = -x$ 。由于 $f(x)$ 的函数表达式为已知, 可构造一函数:

$$V = F(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} \quad (1)$$

V 为间隔为 1 的两点比值, 是 x 的函数, 对(1)式解出其反函数

$$x = g(v) \quad (2)$$

将 $V = \frac{y}{y_1}$ 代入(2)可解得

$$x = g\left(\frac{y}{y_1}\right) \quad (3)$$

$\Delta x = -x$ 可求出, 这种方法可称为比值法。

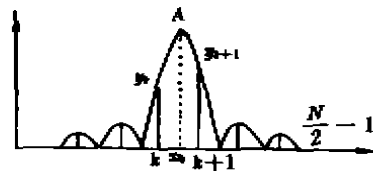


图3 频率和幅值校正

在实际计算中, 主瓣中心 x_0 位于信号真实频率处(图3), 图中 y_k, y_{k+1} 是幅值谱主瓣内二相邻谱线, 以

$$V = \frac{y_k}{y_{k+1}} \quad (4)$$

代入 $x = g(V)$

$$x = g(V) \quad (5)$$

则谱线修正量为

$$\Delta K = -x \quad (6)$$

如以谱线 y_{k-1}, y_k 作校正, 则以 $V = \frac{y_{k-1}}{y_k}$

$$(4a)$$

代入 $x = g(v)$, 这时

$$\Delta K = -x - 1 \quad (6a)$$

校正频率为

$$f_k = (K + \Delta K) \frac{f_s}{N} \quad (7)$$

(7) 式中, K 为谱线序号 ($0 \sim \frac{N}{2} - 1$), N 为分析点数, f_s 为采样频率。

$x = g(v)$ 称为频率校正函数, 对不同的窗函数, $g(v)$ 是不同的。

2 幅值校正法

设窗函数的谱频函数为 $f(x)$, 则图3中主瓣函数为

$$y = Af(x - x_0) \quad (8)$$

这就是信号频谱与窗函数作卷积的结果, 式中, A 为真实幅值, 对应主瓣中心 x_0 , 现将 $y = y_k$,

$x = K$ 代入(8)式得 $y_k = Af(K - x_0)$

式中, $K - x_0 = -\Delta K$, 故可解出 A 值

$$A = \frac{y_k}{f(\Delta K)} \quad (9)$$

3 相位校正法

谱分析所用窗函数都不是对称于 y 轴,要向右平移 $\frac{N}{2}$ 点,其频谱函数相对于 y 轴来说有一相移因子 $e^{-j\frac{N}{2}\omega}$,其相位角

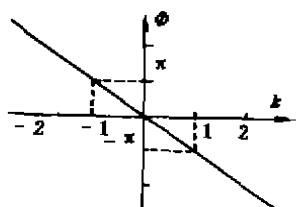


图 4 窗函数的相位

$$\varphi = -\frac{N\omega}{2} \tag{10}$$

ω 与谱线号 K 的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{N}K \tag{11}$$

将(11)式代入(10)得

$$\varphi = -K\pi \tag{12}$$

这表明窗函数的相位是线性相位(图 4)

信号频谱函数与窗函数的频谱函数作复卷积时是复数相乘,也即相位角相加。由图 4 可看出,频率误差半个谱线,相位误差将达 90° ,这表明由 FFT 的实部与虚部所得到的相位如不加校正是不能用的。由(6)式得到谱线修正量后,相位修正量为

$$\Delta\varphi = -\Delta K\pi \tag{13}$$

当实部为 R_k ,虚部为 I_k 时,真实相位角为

$$\theta_k = \text{tg}^{-1}\left(\frac{I_k}{R_k}\right) + \Delta\varphi \tag{14}$$

后面讨论的几种窗函数,都用相同的相位校正公式(13)、(14)。

4 四种窗函数的校正方法

4.1 矩形窗

矩形窗的定义^[1]为

$$W(n) = 1 \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{15}$$

其频谱函数为

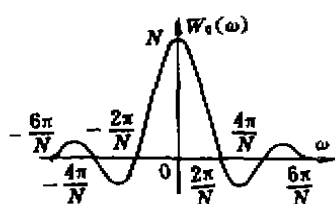


图 5 矩形窗的频谱函数

$$W(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \tag{16}$$

$W(\omega)$ 是一复函数,其模为

$$W_0(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \tag{17}$$

$W_0(\omega)$ 的图形如图 5 所示。当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $W_0(\omega) \rightarrow$

N , 当 $\omega = \frac{2\pi}{N} (= \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $W_0(\omega) = 0$ 。

在离散付氏变换中,频率分辨率(谱线间隔)为

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} \tag{18}$$

$$\text{则 } \omega = \Delta\omega \cdot K = \frac{2\pi}{N}K \quad (K = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1) \quad (19)$$

(19)式中 K 为谱线号,由(19)式及图可以看出,当主瓣中心对正某一谱线时,相邻谱线也对正 W_0 的零点,这时没有频域泄漏发生。

将(19)式代入(17)式得

$$W_0(K) = \frac{\sin(\pi K)}{\sin(\pi K/N)} \quad (20)$$

在 $K = \pm 1$ 区间为主瓣区间,这时由 $N \gg 0$,有 $\sin\left(\frac{\pi K}{N}\right) \approx \frac{\pi K}{N}$,故在主瓣区域可认为

$$W_0 = \frac{\sin(\pi K)}{\frac{\pi K}{N}} = N \cdot \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} \quad (21)$$

在用DFT或FFT的结果求幅值谱时,为使幅值与时域相符,要乘以系数 $\frac{1}{N}$,这就消去(21)式中的系数 N ,考虑到以后的讨论中 K 不一定代表整数,故用 x 代替 K , y 代替 W_0 ,得到

$$y = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (22)$$

这就是频率校正所需要的矩形窗频谱主瓣函数。将(22)式代入(1)式得

$$V = F(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi(x+1)}{\sin[\pi(x+1)]}$$

$$V = F(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} = -\frac{x+1}{x} \quad (23)$$

解出 $F(x)$ 的反函数 $g(v)$

$$x = g(v) = \frac{-1}{1+v} \quad (24)$$

这就是矩形窗的频率校正函数。用(24)式代替(5)中的 $g(v)$,根据式(6)、(6a)和式(7)即可求出校正频率。另外,直接由(23)式可得

$$xf(x) + (x+1)f(x+1) = 0 \quad (25)$$

(25)式表明,在(22)式所代表的曲线上(图6)任取二点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$,当 $|x_1 - x_2| = 1$ 时,二点的重心为坐标原点。如二点都在主瓣内这就相当于谱线抽样的情形,于是可得矩形窗的重心定理:幅值谱主瓣内二条相邻谱线的重心为主瓣中心,对应的频率为信号的准确频率。

将(22)式代入(9)式,可得矩形窗的幅值校正公式

$$A = \frac{\pi \Delta K y_N}{\sin(\pi \Delta K)} \quad (26)$$

由(16)式可知矩形窗相位角 $\varphi = \frac{N-1}{2}\omega$,当 N 很大时, $\frac{N-1}{2} \approx \frac{N}{2}$,故仍用(13)、(14)式进行相位校正。

4.2 汉宁(Hanning)窗

汉宁窗的定义^[2]为

$$W(n) = a - (1-a)\cos\left\{\frac{2\pi}{N}n\right\} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (27)$$

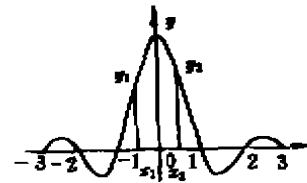


图6 矩形窗的重心定理

其频谱函数为

$$W(\omega) = \{aD(\omega) + \frac{1}{2}(1-a)[D(\omega - \frac{2\pi}{N}) + D(\omega + \frac{2\pi}{N})]\}e^{j\frac{y}{2}\omega} \quad (28)$$

式中 $D(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{j\frac{a}{2}\omega}$ 为狄里赫利核, $a = 0.5$ 为汉宁窗, $a = 0.54$ 为海明窗。括号内的三项

有相位差 $\frac{2\pi}{N}$, 现以三项模函数之和作为 $W(\omega)$ 的模函数, 并参照 (20) ~ (22) 式的推导方法, 可得汉宁窗的主瓣函数

$$\begin{aligned} Y &= a \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{(1-a)}{2} \left\{ \frac{\sin[\pi(x-1)]}{\pi(x-1)} + \frac{\sin[\pi(x+1)]}{\pi(x+1)} \right\} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left[\frac{a}{x} + \frac{1-a}{2(x-1)} + \frac{1-a}{2(x+1)} \right] \\ Y &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{a + (1-2a)x^2}{1-x^2} \end{aligned} \quad (29)$$

(29) 式的函数在 $x \rightarrow 0, y \rightarrow a$; 在 $x \rightarrow \pm 1$ 时, 应用罗比塔法则则有 $y \rightarrow \frac{1-a}{2}$, 其图形如图 7 所示。主瓣宽度为 4 个谱线间隔, $(-2, +2)$ 区间为主瓣。

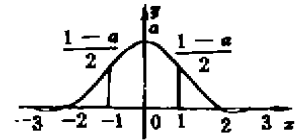


图 7 汉宁窗与海明窗的频谱函数

令 $c = \frac{a}{1-2a}$ (当 $a = 0.54$ 时, $c = -\frac{27}{4}$; 当 $a \rightarrow 0.5$ 时, $c \rightarrow \infty$) 则 (29) 式可写成

$$Y = f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{x^2 + c}{1-x^2} \cdot (1-2a) \quad (30)$$

将 (30) 式代入 (1) 式得

$$\begin{aligned} V = F(x) &= \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{x^2 + c}{1-x^2} \cdot \frac{\pi(x+1)}{\sin[\pi(x+1)]} \cdot \frac{1-(x+1)^2}{(x+1)^2 + c} \\ V = F(x) &= \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x+2}{1-x} \cdot \frac{x^2 + c}{(x+1)^2 + c} \end{aligned} \quad (31)$$

对汉宁窗, $a = 0.5, c \rightarrow \infty$, (31) 式右边第二项为 1, 这时有

$$V = F(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x+2}{1-x} \quad (32)$$

解出 $F(x)$ 的反函数

$$x = g(v) = \frac{v-2}{v+1} \quad (33)$$

这就得到汉宁窗的频率校正函数, 由 (4) ~ (7) 式即可得到校正频率。

由 (32) 式可得

$$(x-1)f(x) + (x+2)f(x+1) = 0 \quad (34)$$

这表明汉宁窗的主瓣函数 $y = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{1}{2(1-x^2)}$ (29)

式中令 $a = 0.5$ 有如下性质: 在曲线上任取二点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 当二点 x 坐标差为 1 时, 将左边点左移 1 格, 右边点右移 1 格, 这时二点的重心在坐标原点 (图 8)。图 7 中的 y_1 与 y_2 点的重心在原点, 对应到幅值谱中则重心处的频率为信号真实频率, 这可称为汉宁窗的重心定

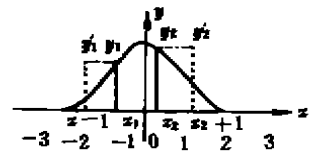


图 8 汉宁窗的重心定理

理。

将(29)式代入(9)式,可得汉宁窗幅值校正公式:

$$A = \frac{\pi \Delta K y_k}{\sin(\pi \Delta K)} \cdot \frac{1 - \Delta K^2}{a + (1 - 2a)\Delta K^2} \quad (35)$$

对汉宁窗, $a = 0.5$, 则有:

$$A = \frac{\pi \Delta K y_k}{\sin(\pi \Delta K)} \cdot \frac{2(1 - \Delta K^2)}{1} \quad (36)$$

相位校正同矩形窗。

4.3 海明(Hamming)窗

汉宁窗的公式令 $a = 0.54$ 则为海明窗,但不能直接使用汉宁窗的校正公式。观察式(31)可知, x 的反函数 $g(v)$ 是一个三次方程,为避免多根现象,现采用迭代法。

$$\text{令} \quad T(x) = \frac{x^2 + c}{(x+1)^2 + c} \quad (37)$$

则(31)式为: $V = \frac{x+2}{1-x} \cdot T(x)$

解出 x 有:

$$\begin{aligned} (1-x)V &= (x+2)T(x) \\ x &= \frac{V - 2 \cdot T(x)}{V + T(x)} \end{aligned} \quad (38)$$

这就是迭代公式,将 $V = \frac{y_k}{y_k + 1}$, $T(x) = 1$ 代入(38)求出 x_0 ,然后再用(38)式进行迭代计算。

$$\text{即} \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{V - 2}{V + 1} \\ x_n &= \frac{V - 2T(x_{n-1})}{V + T(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中: $T(x) = \frac{x^2 + c}{(x+1)^2 + c}$, $c = -\frac{27}{4}$

实际运算表明,用单精度量迭代8次就可达到 10^{-7} 精度。求出 x_0 即可用(6)、(7)式求出校正频率。与前述方法不同之处在于求解 $x = g(v)$ 这一步要用迭代法,其它都相同。

将 $a = 0.54$ 代入(35)式即可得到海明窗幅值校正公式。

$$A = \frac{\pi \Delta K y_k}{\sin(\pi \Delta K)} \cdot \frac{1 - \Delta K^2}{0.54 - 0.08 \Delta K^2} \quad (40)$$

相位校正同矩形窗。

4.4 高斯窗

高斯窗的定义为

$$W(n) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{N/2})^2} \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (41)$$

一般在使用中取 $a = 3$ 。(为了简化推导,这里 $W(n)$ 是偶对称)高斯曲线的付氏变换为^[3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(ax)^2} \cdot e^{-j\omega x} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{c} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{c})^2} \quad (42)$$

对照(41)(42)可知, $c = \frac{a}{N/2}$, $x = n$; 将 c 代入(42),得到(41)式的频谱函数:

$$W(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi N}}{2a} e^{-\frac{1}{2}(\frac{N}{2a}\omega)^2} \quad (43)$$

由于(41)式是对无穷长高斯曲线的截断,故实际的频谱函数应是(43)式与矩形窗频谱函数的卷积。由于得不到卷积函数的表达式,现以(43)式作为其频谱函数,在主瓣峰值附近是一

个很好的近似。

参照矩形窗的推导方法, 消去系数 N , 以 $\omega = \frac{2\pi}{N}K$ 代入 (43), 并以 Y 代替 W , x 代替 K , 得到高斯窗的主瓣函数:

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2a} \cdot \frac{2x}{N})^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^2} \quad (44)$$

令: $c = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}, a = 3, b = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{a})^2$ 则 (44) 式可写为:

$$y = f(x) = ce^{-bx^2} \quad (45)$$

$$V = F(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{ce^{-bx^2}}{ce^{-b(x+1)^2}} = e^{b(2x+1)}$$

解出 $F(x)$ 的反函数:

$$x = g(V) = \frac{1}{2}(\frac{\ln V}{b} - 1) \quad (46)$$

这就是高斯窗的频率校正函数, 由 (4) ~ (7) 式即可得到校正频率。

将 (45) 式代入 (9), 得到高斯窗幅值校正公式:

$$A = \frac{y_A}{c} e^{bx_A^2} \quad (47)$$

由于 (43) 式是主瓣函数的近似表达式, 为进一步提高精度, 对 (45) 式的系数可作一修正。

$$\left. \begin{aligned} y &= ce^{-bx^2} \\ c &= \frac{\sqrt{2P}}{2a}, a = 3, b = \frac{1}{2}(\frac{Q}{a})^2, P = 3.128, Q = 3.12 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

这里 P, Q 值是对 π 值的修正, 都小于 π , 在频率与幅值校正中, 用 (48) 式的参数可使峰顶附近的校正精度提高。

实际频谱分析时使用的高斯窗是 (41) 式向右平移 $N/2$ 点, 故 (43) 式中应有相位因子 $e^{-j\frac{\pi}{2}x}$, 故可用 (13)、(14) 式进行相位校正。

5 计算实例

用计算机产生式 (49) 的函数, 采样频率为 1024 Hz, 作 1024 点 FFT 后, 频率间隔为 1 Hz, 单边幅值谱的准确幅值为 1, 这样便于观察校正误差, 分析结果及校正结果见表 1, 表 2 和图 9。

表 1 多频率信号谱分析结果(均乘以恢复系数)

	频率	幅值	相位		频率	幅值	相位
无 形 窗	173	0.946	137.50	汉	173	0.974	136.05
	193	0.798	185.94	宁	193	0.898	181.9
	198	0.802	44.23	窗	198	0.898	48.247
	173	0.97	136.26	高	173	0.978	136.08
	193	0.883	182.5	斯	193	0.916	182.1
窗	198	0.884	47.71	窗	198	0.918	48.02

$$y = \sqrt{2} \cos(\pi \cdot 173.2t + 100\pi/180) + \sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 193.4t + 110\pi/180) + \sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 197.6t + 120\pi/180) \quad (49)$$

表2 多频率信号谱分析的校正结果

	校正频率	频率误差	校正幅值	幅值误差	校正相位	相位误差
矩形窗	173.19142	-8.6×10^{-3}	1.006281	6.3×10^{-3}	103.0466	3.05
汉宁窗	193.36369	-3.6×10^{-2}	1.003189	3.2×10^{-3}	120.4671	10.47
海宁窗	197.63956	3.3×10^{-2}	1.004259	4.3×10^{-3}	109.1151	-10.9
高斯窗	173.20032	3.2×10^{-4}	0.999969	-3.1×10^{-5}	99.9957	-0.0043
斯劳窗	193.40794	7.9×10^{-3}	1.000919	9.2×10^{-4}	108.4544	-1.55
明窗	197.59378	-6.2×10^{-3}	1.001009	1.0×10^{-3}	121.3662	1.37
高斯窗	173.19756	-2.4×10^{-5}	1.000728	7.3×10^{-4}	100.6995	0.70
斯劳窗	193.39525	-4.8×10^{-3}	1.000824	8.2×10^{-4}	111.2845	1.28
明窗	197.60706	7.1×10^{-3}	1.001099	1.1×10^{-3}	118.4465	-1.55
高斯窗	173.20071	7.1×10^{-4}	1.000089	8.9×10^{-5}	99.9561	-0.044
斯劳窗	193.40048	4.8×10^{-4}	1.000975	9.8×10^{-4}	110.0154	0.015
明窗	197.60125	1.5×10^{-3}	1.001137	1.1×10^{-3}	119.7514	-0.25

显然当频率间隔较远时,如本例中 173.2Hz 这个频率成分,采用哪种窗的校正精度都很高,频率和幅值的误差在 0.5% 以内,相位误差也较小。当两个频率越靠近,校正精度越差,本例中 193.4 和 197.6Hz 这两个频率相隔 4 条谱线,频率和

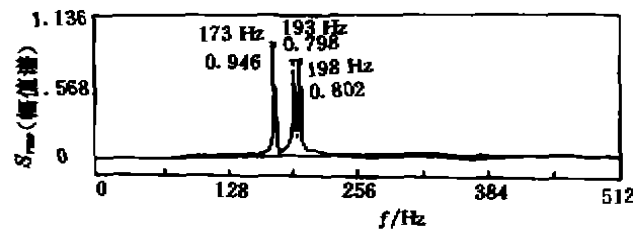


图9 矩形窗未校正谱分析结果

幅值的校正误差明显增大,不加窗时已超过 1%,但加窗后的误差仍在 1% 以下。从理论分析,当两个频率的间隔过小,由于主瓣重叠,此方法根本不适用。

6 结 论

频谱分析的频率、幅值和相位校正方法,可大大提高离散谱分析的精度,从理论和实践上解决了精确求频率和幅值的问题,为精确测量信号参数提供了一种有效手段。本文讨论了 4 种窗函数的幅值校正方法,总体校正精度在相隔 4 个谱线时仍能达到 1%,其缺点是不适用于过于密集的频率分析和非离散谱的分析场合。

参 考 文 献

- 1 孙仲康著. 快速付里叶变换及其应用. 北京,人民邮电出版社,1982. 218 ~ 228
- 2 侯朝焕等著. 实用 FFT 信号处理技术. 北京,海洋出版社,1990. 66 ~ 72
- 3 《数学手册》编写组. 数学手册. 北京,高等教育出版社,1979. 566 ~ 576