1996 年 3 月 重庆大学学报 （自然科学版） Vol. 19, №. 2
第 19 卷第 2 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Mar. 1996

(14) 82－88

板材优化下料的数学模型的研究*

A Study on the Mathematical Models for Two Dimensional Guillotine Cullting-stock

蔡正军 龚 坚 刘 飞
Cai Zhengjun Gong Jian Liu Fei

（重庆大学机械工程一系，重庆，630044；第一作者 27 岁，女，讲师，硕士）

TB TG48

A

摘 要 对国内外已有的几种板材下料数学模型进行了分析，指出了某些模型可能导致一些较好的初始切割方式的漏选，有些模型单纯追求剩余面积最小的下料方式而使下料结果不适当。在此基础上建立了修正过的下料数学模型。该模型采用降维启发式法将二维问题转化为一维问题，其中初始切割方式的选取综合考虑了最小剩余面积、待求零件的相对面积大小、数量要求等多方面的因素。

关键词 Guillotine 下料；最优化；背包问题；数学规划 板材．

中国图书资料分类法分类号 TB114.1 金属切割． 最佳化．

ABSTRACT Based on the analysis and study on some existed models for two-dimensional Guillotine Cutting-Stock problem, it is pointed out that some kinds of the models may miss some good cutting patterns, and some may result in inadequate solutions because of only considering the patterns with the smallest waste. A kind of revised two-dimensional cutting-stock models are developed, which transform the two-dimensional problem into the one-dimensional one using the dimension-decreasing heuristic method and whose initial patterns are considered comprehensively. In this kind of models, not only the least waste, but also the other constraints, such as the demands and the relative area of the order plates are considered.

KEYWORDS Guillotine cutting; optimization; knapsack-problem; mathematical programming

0 引 言

优化下料，提高材料利用率，是国内外非常活跃的研究课题。最常见的一类二维下料问题(Two-dimensional Cutting-stock Problem)是把一定数量的大矩形板切割成所需要的各种规格大小和数量的小矩形。玻璃的下料和钢板、木板等的剪切下料就属于此类下料问题。

由于切割工艺以及原材料性质的不同，大量切割需要 Guillotine 切割，Guillotine 切割定

---

* 收文日期 1995-01-06
国家自然科学基金资助项目一部分

义为：每次切割线平等于待切割矩形中的其中两边，并且连通待切割矩形的另两边。Guillotine 切割也叫直通切割。玻璃切割及剪板机上剪切材料的切割就是 Guillotine 切割最典型的例子。

自60年代以来，国内外对 Guillotine 下料问题的研究非常活跃，已取得不少的研究结论和研究成果[1~7]. 但是，通过对其中几种模型的分析，发现有些模型可能漏选一些较好的初始下料方式，有些模型单纯追求剩余面积最小的下料方式而使总的下料结果不当。因而有必要对二维 Guillotine 优化下料数学模型作进一步的研究。

1　方案优化模型的确定

下料问题模型主要由密切相关的两部分组成。第一部分为初始切割方式下的优化选取模型，第二部分为下料方案的优化模型。其中，后者是一种大型线性规划模型。

设现有原材料规格长为 L，宽为 W，待下料的零件规格为 m 种，$l_i, w_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为第 i 种规格零件的长、宽，n_i 为第 i 种零件需求量。

要进行合理下料，现有模型主要有两类。第一类是以原材料消耗总张数最少为目标函数[1~4]：

Ⅰ）

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant n_i \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \\ &\qquad x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

第二类是以残料总和最小为目标函数[5~7]：

Ⅱ）

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{j=1}^{n} \delta_j x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant n_i \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \\ &\qquad x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

式中　a_{ij}——为第 j 种切割方式切割出的第 i 种规格零件的数量；

δ_j——为在一张原材料上采用第 j 种切割方式后的剩余(或称残料)面积；

x_j——为决策变量，为获得用户所要求的各种规格零件的数量而使用第 j 种切割方式下料的原材张数。

早期的研究[2]已指出 Ⅱ 类模型由于实质上只追求余量最小而没有充分考虑零件的配套性，用于解决某些实际下料问题时可能会出现无解或虽然有解但其材料利用率很低等问题，因而需要把目标修正为等价于模型 Ⅰ 的目标的模型。另外，以上模型中，如果限制 x_j 为整数，则可得到更好的结果，但大多文献采取舍弃 x_j 为整数这一条件，优选出下料方案后再人工调整，造成一定程度的浪费，所以我们选择模型 Ⅰ 作为下料模型的方案优化模型，且加上 x_j 为整数这一约束。

2 初始切割方式的优化选取模型的建立

初始切割方式的确定是下料问题中至关重要的内容。如果要得到理论上的最优下料方案，就要求所有可行下料方式都进入线性规模模型的系数矩阵，但计算机的容量和速度决定了这种方法不可行。因为即使对于一维下料，下料方式的数量也相当巨大，如在 6 m 的条材上套裁 40 种尺寸从 600 mm 至 2400 mm 的零件，可行的下料方式总数就超过了一千万种，即使是 4 种零件套裁，下料方式数量也非常巨大。而对于二维下料，下料方式不仅要满足各下料件面积总和小于原材料面积，还要满足零件长、宽分别在原材料长、宽方向上的套裁，因而二维下料方式远比一维下料复杂且数量大得多。所以，下料方式的选择是下料问题研究中国内外大量研究文献公认的难题之一。

文献[1] 采用带 AMT 树的启发式方法，文献[5 ～ 7]，采用组合选优的列生成法优选出子下料方式。AMT 树法具有简单易行、优化速度快等优点，但是，由于其首先把零件分为几个不相容的子集，有时导致各子集间的零件不能套裁以及剩余面积没有加以利用，从而可能造成原材料的利用率不高。后一种方法在一定程度上是一种压缩枚举法，当零件规格（m）较多时如 m = 10，就得到 $\sum_{i=1}^{9} C_{10} = 1022$ 种下料方式，计算机要解如此多决策变量的线性规划问题是很困难的，因而研制的程序一般用于解决 m 较小的下料问题。

怎样避免对所有下料方式的究举而又能找到改进目标函数值的下料方式？仔细分析，下料方式的产生类似于动态规划中的背包问题，通过解一个背包问题[3,4]、

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} S_i a_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} W_{S_i} a_i \leqslant W \qquad i = 1,\cdots,n$$

$$a_i \geqslant 0,\text{且为整数}$$

便可得到满足目标函数改进的下料方式（其中，S_i 为模型 Ⅰ 在单纯形算法中基于某个基的影子价格系数，W_{s_i} 为所产生的板条宽度，a_i 为一种切割方式中所切出的第 i 种规格件的数量），如果单纯解以上模型，由以下的分析结果，会发现由此得到的下料方式并不一定能保证得到最优结果。

2.1 确定初始切割方式的模型修正

下料问题中引进背包问题来确定初始切割方式，避免了对所有各种可能的初始切割方式的列举。背包问题的解对应一种切割方式，此解可作为一个列向量通过转轴运算进入基解矩阵，以获得改进的目标函数。为获得最优解就需要不断生成新的列向量直至获得满意的结果。

首先，通过简单的方法获取在原材料上只下单一零件的下料方式。用 a_{ii} 表示在原材上只下第 i 种规格零件的数量，则 $(0,\cdots,a_{ii},\cdots,0)^T$ 构成一种可行切割方式。用这种方式构造单纯形表的初始可行基，模型 Ⅰ 的初始单纯形表可写为：

$$
\left[\begin{array}{cccc:cccc:c}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & n_1 \\
0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & n_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & -1 & n_m \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

其中，负单位阵对应松弛变量。

由于改进单纯形法易于获得影子价格向量[6]，且其计算量可大为减小(当列数远大于行数时)，所以计算中采用改进单纯形法。另外，由以上的初始单纯形表，可以取初始可行基为：

$$
B=\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{mm}
\end{bmatrix}_{m\times m}
$$

算法步骤：

1) 构造上表所描述的初始单纯形表，B 为初始可行基；

2) 用改进单纯形法进行转轴变换，得到基于当前基的影子价格系数；

3) 解背包问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum S_i a_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum L_i a_i \leqslant L
\end{aligned}
$$

可得新的切割方式

4) 检验判别数是否全 $\geqslant 0$，若是，得最优解，否则，新的切割方式通过转轴运算进入基解矩阵，转 2)。

在某些情况下，尺寸小的零件的组合较尺寸大的零件参与的组合具有更小的余废料，这样小尺寸零件先进入基解矩阵，导致后面的大尺寸零件无法与小尺寸零件套裁而造成了一定的浪费。

同理，由于没有考虑零件本身的数量要求，当数量要求很小的零件恰好满足剩余面积最小的条件时，背包问题的初解中必然很少包含需求量很大的零件，此零件被逼到最后阶段决策，很可能仅靠剩余面积较大的单一下料方式得到，从而使总体目标值增大。

换言之，选取初始下料方式是为了追求所用原材料总数最小，这可看作一个两阶段决策问题。前一阶段的状态和决策应和后一阶段的状态和决策共同构成最佳决策，后一阶段的决策和所需的下料件的数量直接有关，和下料件的面积相对大小间接有关。所以在选择初始切割方式时不能仅仅以剩余面积最小作为判别标准，还必须综合考虑下料件的相对面积大小，数量要求等因素。

此外，如果不对一种零件出现在一种切割方式中的次数加以限制，当遇到小数量的零件要求时，所选择出的方式中这种零件可能超出其需求量而导致此种方式无效。

总之，利用背包问题选择初始切割方式，还应当综合考虑影响解的各种因素，所以这一阶段的模型可修正为：

假设 U_{Bi} 为零件 i 出现在一种下料方式中的次数的上限，p 为零件中尺寸最大者的编号，Q 为待排零件数量最多者的编号，则

1）初始可行解变为 $a_n = \min\{INT(W/W_n), U_{Bi}\}$

2）相应的初始切割方式的选择：a_i 应满足下式：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_i S_i a_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_i W_n a_i \leqslant W \\
& a_i \leqslant U_{Bi} \\
& a_p + a_Q \geqslant 1 \\
& a_i \geqslant 0, \text{且为整数 } i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

2.2 降维启发式法

前述模型中提到"板条"的概念，其来源于把适用于一维下料的背包问题模型引伸到二维下料的方式选择中而提出的一种降维启发式方法，即通过形成"板条"而把二维下料降为一维下料的启发式方法。

板材区别于条板在于在两个垂直方向上都有长度要求。如果能把零件成组看待，使得零件组的一个方向的长度近似于原材料的长（或宽）方向的长度，而使零件组的另一个方向在原材料的宽（或长）方向套裁，那么"板材"就变成了"条材"，这种零件组就称为板条(strips).

2.2.1 候选板条的形成过程

将单一零件的长、宽(l_i, w_i)分别在原材上排列，且令：

$$m_i = \min\{n_i, \mathrm{int}(L/l_i)\};$$

$$m_i' = \min\{n_i, \mathrm{int}(L/w_i)\}.$$

设板条的长为 L_{Si}，宽为 W_n，则取

$$L_n = \max(l_i m_i, w_i \cdot m_i')$$

$$W_n = \begin{cases} l_i, \text{当 } L_n = w_i \cdot m_i' \\ w_i, \text{当 } L_n = l_i \cdot m_i \end{cases}$$

如下图 1(a)，(b) 所示：

同理，如果使得板条的长与原材料的宽相近，如图 1(c)、(d) 所示，即 $m_i = \min\{n_i, \mathrm{int}(W/l_i)\}$，$m_i' = \min\{n_i, \mathrm{int}(W/w_i)\}$，取 $L_n = \max\{l_i \cdot m_i, w_i \cdot m_i'\}$，背包问题的约束条件相应修成为 s.t. $\sum W_n a_i \leqslant L$，所得初始切割方式也作为可行解。

2.2.2 剩余面积的处理

由于"板条"的长度 L_n 不一定等于原材料的长或宽，如图 1(a)，(b)，(c)，就会在 L 方向

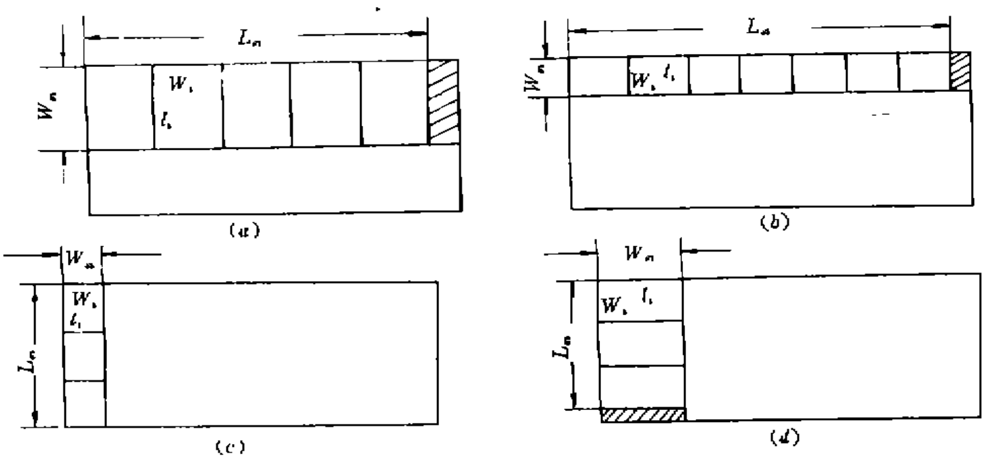

图 1　板条生成示意图

(或 W 方向) 产生余量，如果所有余量集中到一起，形成一个子区域，假如该区域满足一门槛值，则可把这个子区域作为一个子问题来处理。如果子区域不满足，则可动态地调整剩余面积，便能得到使 δ 更小的下料方式。

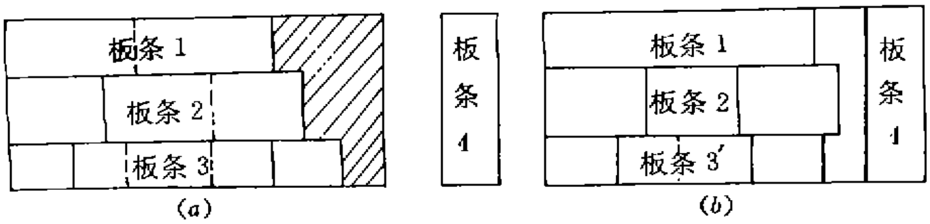

图 2　板条动态调整示意图

图 2(a) 为所选出的一下料方式，阴影部分为剩余面积，在其固定时便无法排板条 4，但如果动态地调整板条 3，使其减少一块变成板条 3′，则可排下板条 4，剩余面积：

$$\delta(b) = \delta(a) + w_3 \cdot l_3 - \delta_4$$

则 δ 降低。

3　结　　论

本文分析了现有的某几类二维 Guillotine 下料模型，采用降维启发式法使二维下料问题降为一维下料问题处理，指出下料问题的第一阶段应综合考虑背包问题所得解的属性，所建立的二维下料模型如下：

1) 下料方案的优化模型：

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant n_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \text{且为整数}; \quad j = 1,\cdots,n$$

2) 决定 a_{ij} 的模型为：对于任一 j，有

$$\begin{array}{lll} \max \quad \sum_{i=1}^{m} s_{ij} a_{ij} & & \max \quad \sum_{i=1}^{m} s'_{ij} a'_{ij} \\ \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_{s_{ij}} a_{ij} \leqslant W & & \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w'_{s_{ij}} a'_{ij} \leqslant L \\ \quad a_{ij} \leqslant U_{B_{ij}} & \text{或者} & \quad a'_{ij} \leqslant U'_{B_{ij}} \\ \quad a_{Pj} + a_{Qj} \geqslant 1 & & \quad a'_{Pj} + a'_{Qj} \geqslant 1 \\ \quad a_{ij} \geqslant 0, \text{且为整数} & & \quad a'_{ij} \geqslant 0, \text{且为整数} \\ \quad i = 1,\cdots,m & & \quad i = 1,\cdots,m \end{array}$$

其中，W_m，W'_m 是通过形成板条而把二维问题降为一维问题而得到的，从而使优化结果进一步得到改善。

参 考 文 献

1 Lai K K, Chan W M. Two dimensional cutting stock problem with multiple layer. Tayor & Francis; Proc. of 11th ICPR, 1991; 675～683

2 Liu Fei, Ding Zhongqing, Cai Zhengjun. The problems in a kind of mathematical models for stock cutting and their solution. Taylor & Francis; Proc. of 11th ICPR, 1991; 643～646

3 Albano A, Orsini R. A heuristic solution of the rectangular cutting-stock problem. The Computer Journal, 1980, 23 (4); 338～343

4 Farley A A. Practical adaptations of the Gilmore-Gomory approach to cutting stock problems. OR specktrum, 1988, 10; 113～123

5 闵仲求．合理下料的实用数学模型及其计算机软件的研究．系统工程理论与实践，1982，4；26～41

6 袁仲良．最优化下料算法与程序．天津：天津大学出版社，1989. 84～87

7 袁仲良．运筹学应用程序集．北京：清华大学出版社，1989. 335～349

8 魏国华，王芬．线性规划．北京：高等教育出版社，1989. 84～88