模糊图拟阵*

Fuzzy Graphic Matroids

吴德垠
Wu Deyin
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；第一作者 39 岁，男，讲师，硕士）

摘　要　首先从模糊图构造模糊圈拟阵并讨论了其性质；然后，定义模糊拟阵的模糊同构概念，在讨论模糊同构的性质的基础上，推广模糊圈拟阵并定义了模糊图拟阵；最后，利用模糊圈拟阵的"圈好"性概念，给出了一个模糊拟阵是模糊图拟阵的充要条件。

关键词　拟阵；模糊拟阵；模糊图拟阵

中国图书资料分类法分类号　O157.2；O159

ABSTRACT　First, in this paper, the fuzzy cycle matroids are constructed from fuzzy graphs and their properties are discussed; Then, the fuzzy isomorphism of fuzzy matroids is defined. On the basis of a careful discussion of the fuzzy inomorphic properties, we generalize fuzzy cycle matroids to define fuzzy graphic matroids; At last, with the help of a good-cycle concept of fuzzy cycle matroids, a necessary and sufficient condition for a fuzzy matrids to be a fuzzy graphic matroids is given.

KEYWORDS　matroids; fuzzy matroids; fuzzy graphic matroids

0　引　言

1935 年，Whitney 开创了拟阵理论的研究。1988 年，R. Goetschel, Jr 和 W. Voxman. 将"模糊"概念引入拟阵理论，开创了"模糊拟阵"的研究。在拟阵理论的研究中，图拟阵理论的研究一直吸引着大批的学者。笔者准备将图拟阵的研究方法和结论引入模糊拟阵的研究，建立"模糊图拟阵"概念，并找到它的一个充要条件。

1　基本概念和结论

定义 1　参考文献[1]的定义 1.

定理 1　参考文献[1]的定理 1.

定理 2[2]（圈公理）　设 E 是有限集，C 是 E 的非空子集族，则 C 是 E 上某拟阵圈集 $\Leftrightarrow$ C 满足下列两条：

1) 若 $C_1, C_2 \in C$ 而且 $C_1 \neq C_2$，则 $C_1 \not\subset C_2$.

---

* 收文日期　1994-06-14

2) 若 $C_1, C_2 \in C$ 而且 $C_1 \neq C_2$，则任 $z \in C_1 \cap C_2$，都有 $C_3 \in C$，使：

$$C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \backslash z$$

为了以后讨论方便，笔者给出一个比 2) 更强的定理。

定理 3[2]　设 C 是拟阵 $M = (E, I)$ 的圈集，若 $C_1, C_2 \in C, C_1 \neq C_2$ 且 $x \in C_1 \cap C_2$，则对任 $y \in C_1 \backslash C_2$，都有一个圈 $C' \in C$，使：

$$y \in C' \subseteq (C_1 \cup C_2) \backslash x$$

定义 2　参考文献[1]的模糊集概念。

定义 3[3]　设 $G = (V, E)$ 是有有限个顶点和有有限条边的图，$\sigma \in F(E)$，则称对偶 $\tilde{G} = (G, \sigma)$ 是图 G 上的一个模糊图。以下，我们总假设 G 是简单连通图。

$u \in F(E)$，若 $u \leqslant \sigma$ 且 $\mathrm{supp}(u)$ 是图 G 的一个圈，则称 u 为 $\tilde{G}$ 的一个模糊圈。$u \in F(E)$，若 $\forall x \in \mathrm{supp}(u)$，都 $u(x) = \sigma(x)$ 而且 $\mathrm{supp}(u)$ 是图 G 的一棵支撑树，则称 u 是模糊图 $\tilde{G}$ 的一棵模糊支撑树（关于图的基本概念，请参考[4]）。

定义 4　参考文献[1]的定义 2.

设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵。我们定义函数，$\rho: F(E) -> R^+$ （R^+ 表非负实数）任 $u \in F(E)$，$\rho(u) = \sup\{|v| \mid v \leqslant u, v \in \Psi\}$，称 ρ 为 Π 的模糊秩函数。

注 1　参考文献[1]的定理 2.

定理 4　参考文献[1]的定理 3.

定理 5　设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵，$\alpha \in (0,1)$，令 $M_\alpha = (E, I_\alpha)$ 如注 1 所定义，任 $u \in F(E)$，则有下列结论：

1)[5]　任 $u \in \Psi$ <=> 任 $\alpha \in (0,1)$，都有 $(u)_\alpha \in I_\alpha$.

2)[6]　若 $R^+(u) = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ $(0 < t_1 < \cdots < t_k)$，u 是 Π 的模糊圈 <=> ①，$(u)_{t_1}$ 是 (E, I_{t_1}) 的圈；②，$(u)_{t_i} \in I_{t_i}$ $(i = 2, \cdots, k)$.

3)[6]　若 u 不在 Ψ 中，则有模糊圈 v，使 $v \leqslant u$.

4)[6]　若 u_1, u_2 是 Π 的模糊圈且 $u_1 \leqslant u_2$，则 $\mathrm{supp}(u_1) = \mathrm{supp}(u_2)$.

定理 6　1) 参考文献[1]的定理 5.

2) 参考文献[1]的定理 4.

2　模糊圈拟阵

定理 7　设 $\tilde{G} = (G, \sigma)$ 是图 $G = (V, E)$ 上的模糊图。令 $\Psi = \{v \in F(E) \mid v \leqslant \sigma$ 且 v 不含 $\tilde{G}$ 的模糊圈$\}$，则 $\Pi(\tilde{G}) = (E, \Psi)$ 是 E 上的闭模糊拟阵（称其为模糊图 $\tilde{G}$ 的模糊圈拟阵）.

证明：显然 Ψ 满足定理 4 的 1) 和 2). 下证，Ψ 有性质 3). 令 $I = \{X \subseteq E \mid X$ 不含 G 的圈$\}$，由参考文献[2]知，$M(G) = (E, I)$ 是 E 上的拟阵（称为图 G 的圈拟阵）.

任 $v_1, v_2 \in \Psi$ 且 $|\mathrm{supp}(v_1)| < |\mathrm{supp}(v_2)|$. 从 $\mathrm{supp}(v_1), \mathrm{supp}(v_2) \in I$ 和定义 1 的 3) 知，有 $x \in I$，使：

$$\mathrm{supp}(v_1) \subset X \subseteq \mathrm{supp}(v_1) \cup \mathrm{supp}(v_2) = \mathrm{supp}(v_1 \vee v_2)$$

造模糊集

$$w(x) = \begin{cases} \alpha & x \in X \backslash \mathrm{supp}(v_1) \\ v_1(x) & \text{否则} \end{cases}$$

其中 $a = \min\{m(v_1), m(v_2)\}$. 显然,$v_1 < w \leqslant v_1 \vee v_2$ 且 $m(w) = a$,还有 $w \leqslant v_1 \vee v_2 \leqslant \sigma$.

由 $X = \mathrm{supp}(w)$ 和 $v_1 \in \Psi$ 知,w 不含 $\tilde{G}$ 的模糊圈,因此,$w \in \Psi$. 即 Ψ 满足定义 4 的 3).

故 $\Pi(\tilde{G}) = (E, \Psi)$ 是一个模糊拟阵。此外 $\Pi(\tilde{G})$ 的闭性可由注 1 和定理 8 给予。

定理 8 设 $\tilde{G} = (G, u)$ 是图 $G = (V, E)$ 上的模糊圈,$R^+(u) = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}(0 < s_1 < \cdots < s_n \leqslant 1)$,则 $\tilde{G}$ 的模糊拟阵 $\Pi(\tilde{G}) = (E, \Psi)$ 的基本序列为 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n \leqslant 1$,它的导出拟阵序列为 $M_{s_1} = (E, I_{s_1}) \supset M_{s_2} = (E, I_{s_2}) \supset \cdots \supset M_{s_n} = (E, I_{s_n})$,而且 I_{s_i} 是 $M(G_{s_i})$ 的独立集族($i = 1, 2, \cdots, n$)($M(G_{s_i})$ 是图 G_{s_i} 的圈拟阵,I_{s_i} 如注 1 所定义,G_{s_i} 是$(u)_{s_i}$ 在 G 中的边导出子图)。

证明:(证明省略)。

定理 9 设 $\tilde{G} = (G, u)$ 是 $G = (V, E)$ 上的模糊图,$R^+(E) = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}(0 < s_1 < \cdots < s_n \leqslant 1)$,则 $\tilde{G}$ 的模糊圈拟阵 $\Pi(\tilde{G}) = (E, \Psi)$ 有下列性质:

1) 任 $v \in F(E)$,则 v 是 $\Pi(\tilde{G})$ 的模糊基$\Leftrightarrow v$ 是 $\tilde{G}$ 的模糊支撑树。

2) 设 v_1, v_2 都是 $\Pi(\tilde{G})$ 的模糊基,则任 $a \in \mathrm{supp}(v_1)$,都有 $a' \in \mathrm{supp}(v_2)$,使:

$(v_1 \mathbin{/\!/} a) \parallel a'$ 也是 $\Pi(\tilde{G})$ 的模糊基。

3) 若 $C \subseteq E$ 是 $M_{s_i} = (E, I_{s_i})$ 的非环圈,则 C 也是 $M_{s_{i-1}}, \cdots, M_{s_1}$ 的非环圈。

4) 设 $v \in F(E)$,则 v 是 $\Pi(\tilde{G})$ 的非环模糊圈$\Leftrightarrow v$ 是 $\tilde{G}$ 的非环模糊圈。

5) 设 $v \in F(E)$,则 v 是 $\Pi(\tilde{G})$ 的非环模糊圈$\Leftrightarrow \rho(v) = |v| - m(v)$,$v$ 不含模糊环,而且任 $w \leqslant v$,$\mathrm{supp}(w) \subset \mathrm{supp}(v)$ 都使此式不成立(其中 ρ 的模糊秩函数)。

6) 设 v_1, v_2 是 $\Pi(\tilde{G})$ 的非环模糊圈,$\mathrm{supp}(v_1) \neq \mathrm{supp}(v_2)$ 且 $a \in \mathrm{supp}(v_1) \cap \mathrm{supp}(v_2)$. 则有非环模糊圈 w 使:

$$w < (v_1 \vee v_2) \mathbin{/\!/} a$$

7) 设 v_1, v_2 是 $\Pi(\tilde{G})$ 的非环模糊圈,$\mathrm{supp}(v_1) \neq \mathrm{supp}(v_2)$,且 $a \in \mathrm{supp}(v_1) \cap \mathrm{supp}(v_2)$,则对任 $a' \in \mathrm{supp}(v_1) \backslash \mathrm{supp}(v_2)$,都有非环模糊圈 w 使:

$$w < (v_1 \vee v_2) \mathbin{/\!/} a \text{ 且 } a' \in \mathrm{supp}(w).$$

3 模糊图拟阵

在参考文献[2]中,定义了一般拟阵的同构。现在来讨论模糊拟阵的模糊同构概念,然后,由模糊同构概念定义模糊图拟阵。

定义 5 设 $\Pi_1 = (E_1, \Psi_1)$ 和 $\Pi_2 = (E_2, \Psi_2)$ 都是模糊拟阵。设 $\psi: E_1 \to E_2$ 是一一映射。定义模糊集映射:

$$\psi'': F(E_1) \to F(E_2)$$

$\forall u \in F(E_1)$,$\forall x \in E_2$,有 $\psi''(u)(x) = u(\psi^{-1}(x))$. 若任 $u \in F(E_1)$,$u \in \Psi_1 \Leftrightarrow \psi''(u) \in \Psi_2$,则称模糊拟阵 Π_1 与 Π_2 模糊同构。记作 $\Pi_1 \cong \Pi_2$. 又称 ψ'' 是 Π_1 到 Π_2 的模糊同构映射。

定理 10 设 $\psi'': F(E_1) \to F(E_1)$ 是模糊拟阵 Π_1 到 Π_2 的模糊同构映射,$\forall u_1, u_2 \in F(E_1)$,则:

$$u_1 < u_2 \Leftrightarrow \psi''(u_1) < \psi''(u_2)$$

证明:(证明省略)。

推论 1 设 ψ'' 是模糊拟 Π_1 到 Π_2 的模糊同构映射,则 u 是 Π_1 的模糊基$\Leftrightarrow \psi''(u)$ 是 Π_2

的模糊基。

推论 2　若 $\Pi_1 \cong \Pi_2$，则 Π_1 是闭模糊拟阵 $\Leftrightarrow$ Π_2 是闭模糊拟阵。

定理 11　设模糊拟阵 $\Pi_1 = (E_1, \Psi') \cong \Pi_2 = (E_2, \Psi'')$，则任意 $r \in (0,1]$，都有 $M'_r = (E_1, I'_r) \cong M''_r = (E_2, I''_r)$（这里是指拟阵的同构[2]，此外 $I'_r = \{(u)_r \mid \forall u \in \Psi'\}$，$I''_r = \{(u)_r \mid \forall u \in \Psi''\}$）。

证明：设 $\psi: E_1 \to E_2$ 是一一映射，$\psi^*: F(E_1) \to F(E_2)$ 是 Π_1 到 Π_2 的由 ψ 导出的模糊同构映射。

$\forall A \in I'_r$，都有 $\omega(A, r) \in \Psi'$. 因此，任意 $x \in E_2$，有

$$\psi^*(\omega(A, r))(x) = \omega(A, r)(\psi^{-1}(x)) = \omega(\psi(A), r)(x)$$

即 $\omega(\psi(A), r) \in \Psi''$. 由此得 $\psi(A) \in I''_r$.

反之，若 $A \subseteq E_1$，若 $\psi(A) \in I''_r$，则从模糊同构的对称性知：

$$\psi^{-1}(\psi(A)) = A \in I'_r$$

故　由一般拟阵的同构定义即知，$M'_r \cong M''_r$.

推论 1　若 $\Pi_1 \cong \Pi_2$，则 Π_1 与 Π_2 的基本序列相同，它们的导出摺阵序列中的拟阵对应同构。

定理 12　设 $\Pi_1 \cong \Pi_2$，ψ^* 为其模糊同构映射，则 u 是 Π_1 的模糊圈 $\Leftrightarrow$ $\psi^*(u)$ 是 Π_2 的模糊圈。

证明：设 $\Pi_1 = (E_1, \Psi_1)$，$\Pi_2 = (E_2, \Psi_2)$，$\psi: E_1 \to E_2$ 是一一映射，ψ^* 是由其导出的模糊同构映射。

$\forall a_0 \in E_1$，都有 $a'_0 \in E_2$，使 $\psi(a_0) = a'_0$. $\forall u \in F(E_1)$，$\forall a \in E_2$，都有：

$$\begin{aligned}\psi^*(u \mathbin{/\!/} a_0)(a) &= (u \mathbin{/\!/} a_0)(\psi^{-1}(a)) \\ &= u(\psi^{-1}(a)) - \omega(\{a_0\}, u(a_0))(\psi^{-1}(a)) \\ &= \psi^*(u)(a) - \omega(\{a'_0\}, u(a_0))(a) \\ &= (\psi^*(u) \mathbin{/\!/} (a'_0)(a)\end{aligned}$$

因此，$\psi^*(u \mathbin{/\!/} a_0) = \psi^*(u) \mathbin{/\!/} a'_0$. 由此和模糊同构定义就有：

u 是 Π_1 的模糊圈 $\Leftrightarrow$ $u \notin \Psi_1$，而且 $\forall a_0 \in \mathrm{supp}(u)$，都有 $u \mathbin{/\!/} a_0 \in \Psi_1$ $\Leftrightarrow$ $\psi^*(u) \notin \Psi_2$. 又 $\forall a'_0 \in \mathrm{supp}(\psi^*(u))$，都有：　$\psi^*(u) \mathbin{/\!/} a'_0 \in \Psi_2$ $\Leftrightarrow$ $\psi^*(u)$ 是 Ψ_2 的模糊圈。

定义 6　设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵。若有模糊图 $\tilde{G}$，使 Π 模糊同构于模糊圈拟阵 $\Pi(\tilde{G})$，则称 Π 是模糊图拟阵。

定义 7　设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵，$M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1$ 为其导出拟阵列。若 $C \subseteq E$ 是 $M_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的非环圈，则 C 也是 M_1 的非环圈，那么称 Π 是圈好模糊拟阵。

模糊图拟阵都是圈好模糊拟阵，反之却不然。这是由于模糊图拟阵都是闭的，而圈好性并不能保证闭性（考察一个没有模糊圈和模糊基的模糊拟阵即知）。

定理 13　设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵，$0 < r_1 < \cdots < r_n < 1$ 是其基本序列，$M_{r_1} \supset M_{r_2} \supset \cdots \supset M_{r_n}$ 是其导出拟阵序列，则 Π 是模糊图拟阵 $\Leftrightarrow$ Π 是闭的圈好模糊拟阵，而且 M_{r_1} 是图拟阵[2]。

证明："$\Rightarrow$" 设 Π 是模糊图拟阵，则会有模糊图 $\tilde{G}$，使 $\Pi \cong \Pi(\tilde{G})$. 因此，由定理 9 的(3)和定理 10 的推论 2 知，Π 是闭的圈好模糊拟阵。再由定理 8 和定理 10 的推论 1 知，M_{r_1} 是图拟阵。

“$<=$”由已知，有图 $G=(E',V)$，使 $M_{r_1}\cong M(G)$（$M(G)$ 表示由图 G 导出的圈拟阵[2]）。设 $\psi:E\to E'$ 是它们的同构映射。构造模糊集 $\sigma\in F(E')$，使 $\forall a'\in E',\sigma(a')=\sup\{u(\psi^{-1}(a'))\,|\,\forall u\in\Pi\}$。从而得到模糊图和模糊圈拟阵 $\tilde{G}$ 与 $\Pi'=\Pi(\tilde{G})=(E',\Psi')$。下面，我们要证明 $\Pi\cong\Pi(\tilde{G})$。

根据定义 5，从 ψ 构造映射 $\psi'':F(E)\to F(E')$。我们来证明，ψ'' 就是 Π 到 $\Pi(\tilde{G})$ 的模糊同构映射。

1）$\forall u\in\Psi$，都 $\psi''(u)\in\Psi'$。使用反证法：若有某 $u\in\Psi$，使 $u''(u)\notin\Psi'$，则由定理 5，有模糊圈 v，使 $v\leqslant\psi''(u)$。不妨设 $R^+(v)=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$。再由定理 5 知，$(v)_{t_1}$ 是 $M'_{t_1}=(E',I'_{t_1})$ 的圈。

若 $(v)_{t_1}$ 是非环圈，则由定理 9 可知，它也是 $M'_{m(\sigma)}=(E',I_{m(\sigma)})$ 是非环圈。但是，$M'_{m(\sigma)}\cong M(G)\cong M_{t_1}$。因此，$\psi^{-1}((v)_{t_1})\subseteq\mathrm{supp}(u)$ 是 M_{r_1} 的圈。这与 $u\in\Psi$ 矛盾。

若 $(V)_{t_1}$ 是环，则有 $a'\in E'$ 和 $a\in E$ 使 $\psi(a)=a'$ 且使 $(v)_{t_1}=\{a'\}\notin I'_{t_1}$。这说明：$\sigma(a')<t_1$。又 $u(\psi^{-1}(a'))=\psi''(u)(a)\geqslant v(a')\geqslant t_1$，这与 $\sigma(a')$ 的定义矛盾。

2）我们先证：$\forall a'\in E',\sigma(a')=\max\{u(\psi^{-1}(a'))\,|\,\forall u\in\Psi\}$。

若有某 $a'\in E'$，使 $\forall u\in\Psi$，都：$u(\psi^{-1}(a'))<\sigma(a')$ （$*$）

由 Π 的闭性和定理 6，会有模糊基 $v\in\Psi$，使 $u(\psi^{-1}(a'))\leqslant v(\psi^{-1}(a'))$，则要么 $v(\psi^{-1}(a'))=\sigma(a')$（这与（$*$）式矛盾）；要么 $v(\psi^{-1}(a'))<\sigma(a')$，又会有模糊基 v'，使 $v(\psi^{-1}(a'))<v'(\psi^{-1}(a'))$，…，在这个过程中，要么有模糊基与（$*$）式矛盾，要么就会得到无穷个不等的模糊基，这又与模糊阵不会有无限个模糊基矛盾。

再证，$\forall\psi''(u)\in\Psi'$，都 $u\in\Psi$。右有 $\psi''(u)\in\Psi'$，使 $u\notin\Psi$。取 Π 的模糊圈 v，使 $v\leqslant u$。若设 $R^+(v)=\{h_1,h_2,\cdots,h_s\}$，则由定理 5 知 $(v)_{h_1}$ 是 M_{h_1} 的圈。

若 $(v)_{h_1}$ 是非环圈，则 $(v)_{h_1}$ 也是 M_{r_1} 的非环圈。由同构，$\psi((v)_{h_1})$ 是 $M(G)$ 的非环圈，它也是 G 的非环圈。从 $\psi((v)_{h_1})\subseteq\psi(\mathrm{supp}(u))\subseteq\mathrm{supp}(\psi''(u))$ 和定理 9 的（4）知矛盾。

若 $(v)_{h_1}=\{a\}\notin I_{h_1}$ 是环，则 $v(a)=h_1\leqslant u(a)$。$\forall w\in\Psi$，由定理 5 知，都 $w(a)<h_1$。这说明，$\sigma(\psi(a))<h_1$。但是，$h1>\sigma(\psi(a))\geqslant\psi''(u)(\psi(a))=u(\psi^{-1}(\psi(a)))=u(a)\geqslant h_1$，矛盾。

由 1）和 2）的证明即知，$\Pi\cong\Pi(\tilde{G})$。

参 考 文 献

1 吴德垠．闭正规模糊拟阵的模糊基集特征．重庆大学学报，1996，19(2)：30～35

2 Welsh D J A. Matroid Theroy. Academic Press, London, 1976, 7～24

3 Zimmermann H. —J. Fuzzy Set Theory and Its Application. Kluwer-NijhoffPublishing, 1985, 74～77

4 Swamy M N S, Thulasiraman K. Graphs, Networks, and Algorithms. John Wiley & Sone, inc, 1981, 3～52, 263～280

5 Goetschel R. Jr, Voxman W. Fuzzy Matroids. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27: 291～302

6 Goetschel R. Jr, Voxman W. Fuzzy Circuits. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 32: 35～43