1996 年 7 月 重庆大学学报 （自然科学版） Vol. 19, №. 4
第 19 卷第 4 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Jul. 1996

(11) 53－59

能量无限的信号的小波分析方法*

Wavelet Analysis Methods to the Signals with Infinite Energy

TN911.1 O174.22

张世清 刘 全
Zhang Shiqing Liu Quan
(重庆大学应用数学系，重庆，630044；第一作者 30 岁，男，副教授，博士)

A **摘 要** 利用连续小波变换研究了能量为无限的信号的谱分析，引进了时-频功率谱的概念，并研究了时-频功率谱与经典的功率谱及平均功率的关系；还引进了自相关函数的小波变换，且研究了它与时-频功率谱之间的关系。

关键词 小波变换；时频功率谱；相关函数；能量无限信号
中国图书资料分类法分类号 O174.22

ABSTRACT We study the spectrum analysis to the signals with infinite energy using continuous wavelet transform, the concept of time-frequency power spectrum is presented, and the relations between the time-frequency power spectrum and classical power and average power are studied, the wavelet transform of self-correlation function is also presented, and the relations between it and time-frequency power spectrum are also studied.

KEYWORDS wavelet transform; time-frequency power spectrum; correlation function; signals with infinite energy

0 引 言

1822 年，法国大数学家 Fourier 发表他的《热的解析理论》并提出现在所谓的付氏分析。1965 年，美国 Bell 实验室的两位工程师 Cooley，Tukey 在前人工作的基础上发表了计算付氏变换高效算法的论文，这种算法称为快速付氏变换（简称为 FFT）. 付氏分析已成为最完美的数学理论与最广泛和有效地被科学和工程应用着的数学方法之一。

但是付氏分析也有它的严重缺点：不能做局部分析。即它在时空域中没有任何分辨，是一种纯频域分析，付氏分析反映不出频率随时间的演化。付氏变换在任何有限频段上的信息都不足以确定在任意小范围内的信号，即不能通过付氏变换的局部信息重构原来的信号；须考虑无限长时间（包括信号过去、现在和将来的信息）才能得到单个频率处的谱，这也可以从著名的 Heisenberg 测不准原理与付氏变换的关系来说明。对于从信号的局部观察抽取谱信

* 收文日期 1994-06-15
本文得到国家自然科学基金（青年基金）的部分资助

息，付氏分析无能为力。

实际问题中往往需要知道信号在任一时刻(实际上是任一短暂的时间间隔内)的频率特征，如故障诊断中出现的奇异信号，经常需要同时对信号在时空域和频率域上实行局部化，由 Heisenberg 测不准原理知，这是 Fourier 变换做不到的。因此，需要寻找一种能对信号实行时频局部化分析的新方法。

1946 年，Gabor 首先用 Gauss 函数做窗口函数引进加窗 Fourier 变换(Gabor 变换)来对信号做局部化分析，后来发展为一般的加窗 Fourier 变换(短时 Fourier 变换)，它能够刻画信号的局部时频信息，但是它在应用中也受到相当的限制，例如，对离散加窗 Fourer 变换它的局部化格点在整个相空间里是等均分布的，即它的时间-频率局部化的格式与格点位置无关，即它有局部化格式固定不变的特性，用它分析频域宽、频率变化激烈的信号时，由于要遵循信号测不准原理，为了能正确获得高频的信息，时间局部化参数必须取很小，于是系数总量很大，即样本点要取得相当多，既不经济又费时间，不是理想的方法。因此用加窗付氏变换处理有奇异性的信号不很有效，而在故障信号处理等许多实际问题中却经常须要处理奇异信号(突变信号)。

小波变换首先就是做为处理奇异性信号的有力工具产生和发展起来的。1984 年，搞理论物理的 Grossmann 与搞石油开发信号处理的 Morlet 在处理地震数据时首先提出了小波变换的思想，并成功地运用于地震信号的分析，随后，法、美、英等国的一些著名数学家如 Meyer[1]，Daubechies[2,3]，Mallat[4,5]，Battle，Lemarie，Chui[6]，Coifman，Jaffard，Wickerhauser[7]等从理论和应用上对小波做了一系列研究，形成了一个新的数学分支，即小波分析。它已被认为是付氏分析发展史上里程碑式的进展。近几年在美、英、法、德等国家已成为众多学科共同关注的热点：美国已将它列为 90 年代应用数学的 8 个前沿课题之一，美国国防部的关键技术计划认为小波变换将对未来国防关键技术中信号处理研究产生重要的影响；英国皇家数学会也将小波分析列为 90 年代重点发展的 10 大方向之一；法国、德国等一些国家也都纷纷投入大量人力物力，对这一有广泛应用价值的重要领域进行研究。

粗略地说，小波(子波)是一种小的数字波动，它一般是中央的一个尖峰，二边有二个很小的负尖峰。小波分析优于付氏分析之处在于，它在时域和频率域同时具有良好的局部化性质，它有一个弹性的时-频窗，对高频(低频)信号成分，时窗自动变窄(宽)。由于小波分析能对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长，可以聚焦到对象的任意细节，因此被人们称为“数学显微镜”。

在小波分析的纯数学理论发展的同时，它在工程和物理中的应用的研究也发展得异常迅速。人们发现和预计它将广泛应用于信号分析、图象处理、模式识别、数据压缩、故障诊断与监控(包括机械、电机、汽车、通讯设备等)、量子场论、边缘探测、地震勘探、语言识别与合成、音乐、通信、数字电视和电话、统计分析与湍流模拟、天体识别、机器视觉、计算机视觉和人体视觉、神经网络、彩色复印、非线性动力系统(包括分形、混沌等)、微分方程数值解、雷达(提高雷达系统的分辨能力)、CT 成象(用于描述不确定的乳房 X 线照片中肿瘤的确切性质、胎儿心脏监听、超声波图象放大和心电图分析，还可用于癌症等疾病的早期诊断)，工业探伤(ICT)它还可用来使模糊的相片恢复本来面目，以及用于跟踪股票市场的涨落等等。

笔者利用连续小波变换研究能量为无限的信号，引进了时-频功率谱的概念，并研究了时-频功率谱与通常的功率谱及平均功率的关系；还引进了自相关函数的小波变换，并研究

了它与时-频功率谱之间的关系。

1　连续小波变换及其性质

1984年，法国理论物理学家Grossmann和石油地质信号处理学家Morlet首先明确提出小波及连续小波变换的概念，并研究了它们的性质。

定义1　设 $\Psi \in L^2(R) = \{f \mid f$ 在 R 上可测，且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty\}$，若 Ψ 满足"容许条件"：

$$C_\Psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

则称 Ψ 为一个"基本小波"（容许小波、母小波）.

定义2　设 Ψ 是母小波，对 Ψ 进行伸缩和平移变换得到一族函数：

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in R^* = R \backslash \{0\}, b \in R$$

称 Ψ 生成的函数族 $\Psi_{a,b}$ 为连续小波或分析小波。

定义3　设 Ψ 是母小波，$\forall f \in L^2(R)$，令

$$(W_\Psi f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Psi}} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \frac{1}{\sqrt{C_\Psi}} \langle f, \Psi_{a,b} \rangle$$

则称 $W_\Psi f$ 为 f 的积分小波变换(IWT).

性质1　W_Ψ 是从 $L^2(R)$ 到 $L^2\left(R^* \times R, \frac{da\,db}{a^2}\right)$ 的等距变换。

性质2(Plancherel 公式)　$\forall f_1, f_2 \in L^2(R)$

$$\langle W_\Psi f_1, W_\Psi f_2 \rangle_{L^2\left(R^* \times R, \frac{da\,db}{a^2}\right)} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(R)}$$

性质3(反演公式)　$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{R^*} (W_\Psi f)(a,b) \Psi_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} \right) db$$

小波变换的上述简单性质在我们下面对能量无限的信号进行谱分析时要用到。

2　能量无限的信号的时-频功率谱

实际问题中，一般的非周期信号属于能量有限信号，但是周期信号、阶跃信号及随机信号能量均为无穷大，此时，笔者不研究信号的能量而是研究信号的平均功率，为了对平均功率有限的信号进行谱分析，传统的做法是引进功率谱(通过Fourier变换)，笔者从小波变换具有优良的时-频局部性质出发，引进时-频功率谱的概念，它能够克服传统的功率谱在时空域中没有任何分辨的缺点。笔者还研究了能够做局部分析的时-频功率谱与经典的功率谱、平均功率之间的关系。

定义4　能量无限的信号 $f(t)$ 的平均功率定义为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

若 P 为有限值，则称 $f(t)$ 是功率有限信号。

记
$$f_T(t)=\begin{cases}f(t) & |t|\leqslant T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases}$$

其中[$-T/2$,$T/2$]称为采样区间。

显然，$P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|f_T(t)|^2\mathrm{d}t$.

记 $f_T(t)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{f}_T(\omega)$，则由 Parseval 恒等式(Plancherel 公式)有

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_T(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|\hat{f}_T(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

定义 5 称 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{T}$ 为 $f(t)$ 的功率密度函数，简称功率谱，记为 $S(\omega)$. 显然，$P=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega$.

利用功率谱可以对信号进行谱分析，但它是一种纯频率分析，在时空域没有任何分辨，为克服这一缺点我们利用小波变换来定义时-频功率谱：

考虑 f_T 的小波变换：

$$(W_\Psi f)(a,b)=\frac{1}{\sqrt{C_\Psi}}|a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f_T(t)\overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{C_\Psi}}|a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\mathrm{d}t$$

由 Parseval 恒等式(Plancherel 公式)

$$\int_{R^*}\frac{1}{a^2}\left\{\int_R|W_\Psi f(a,b)|^2\mathrm{d}b\right\}\mathrm{d}a=\|f\|^2_{L^2(R)}$$

有
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\left\{\int_R|W_\Psi f_T(a,b)|^2\mathrm{d}b\right\}$$

自然地，笔者引进以下概念：

定义 6 称 $S_T(a,b)=\frac{1}{T}|W_\Psi f_T(a,b)|^2$ 为 $f_T(t)$ 的平均时-频功率谱(时-频功率密度函数)，称 $S(a,b)=\lim\limits_{T\to\infty}S_T(a,b)$ 为 $f(t)$ 的时-频功率谱。

性质 4 设 $f(t)$ 是能量无限但功率 P 有限的信号，则

$$S(a,b)\leqslant\frac{P}{C_\Psi}\cdot\|\Psi\|^2_{L^2(R)}$$

证 由 Cauchy-Schwartz 不等式有：

$$|W_\Psi f_T(a,b)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{C_\Psi}}\|\Psi\|_{L^2}\cdot\|f_T\|_{L^2}$$

故
$$S_T(a,b)=\frac{1}{T}|W_\Psi f_T(a,b)|^2\leqslant\frac{1}{TC_\Psi}\|\Psi\|^2_{L^2}\cdot\|f_T\|^2_{L^2}$$

$$S(a,b)=\lim_{T\to\infty}S_T(a,b)\leqslant\frac{1}{C_\Psi}\|\Psi\|_{L^2}^2\cdot P$$

性质 5　时 - 频功率谱与平均功率有以下关系：

$$P=\int_{R^*}\left[\frac{1}{a^2}\left(\int_R S(a,b)\mathrm{d}b\right)\right]\mathrm{d}a$$

即平均功率是时 - 频功率谱的一种加权积分平均。

证　$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_R|W_\Psi f_T(a,b)|^2\mathrm{d}b$$

$$=\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_R\lim_{T\to\infty}\frac{|W_\Psi f_T(a,b)|^2}{T}\mathrm{d}b=\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_R S(a,b)\mathrm{d}b$$

下面笔者研究前面引进的时 - 频功率谱与经典的功率谱之间的关系。

定理 1　设 f 是能量无限但功率有限的信号，其功率谱和时 - 频功率谱分别为 $S(\omega)$ 和 $S(a,b)$，则有以下关系式：

$$S(\omega)=\left|\int_{R^*}|a|^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}a\int_R\sqrt{S(a,b)}\,\mathrm{sgn}(W_\Psi f(a,b))e^{-i\omega b}\hat{\Psi}(a\omega)\mathrm{d}b\right|^2$$

证　$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\dfrac{|\hat{f}_T(\omega)|^2}{T}$，由小波反演公式，

$$\hat{f}_T(\omega)=\int_R\left(\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_R W_\Psi f_T(a,b)\Psi_{a,b}(t)\mathrm{d}b\right)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\left\{\int_R[W_\Psi f_T(a,b)]\mathrm{d}b\cdot\int_R\Psi_{a,b}(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\int_{R^*}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_R W_\Psi f_T(a,b)\cdot|a|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-i\omega b}\hat{\Psi}(a\omega)\mathrm{d}b$$

$$=\int_{R^*}|a|^{-\frac{3}{2}}\left(\int_R W_\Psi f_T(a,b)e^{-i\omega b}\hat{\Psi}(a\omega)\mathrm{d}b\right)\mathrm{d}a$$

由功率谱 $S(\omega)$ 及时 - 频功率谱 $S(a,b)$ 的定义即知它们之间的关系式成立。

3　自相关函数的小波变换

除了用功率谱分析能量无限的信号外，对随机信号还可以用相关法进行分析。下面我们研究了自相关函数的小波变换及其与时 - 频功率谱、功率谱之间的关系。

定义 7　设 $f(t)$ 是功率有限信号，称

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\overline{f(t-\tau)}\mathrm{d}t$$

为 $f(t)$ 的自相关函数。

显然 $R(\tau)$ 具有以下性质：

性质 6

$$R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_R S(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{R^+}\left(\frac{1}{a^2}\int_R S(a,b)\mathrm{d}b\right)\mathrm{d}a=P$$

为了研究自相关函数的小波变换，笔者先给出二个引理：

引理 1　设 $f(t)$ 是功率 P 有限的连续信号，且设 $f(t)$ 的能量无限。

则 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致有界。

证：$\forall T>0$，由于 $|f(t)|^2$ 是 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上的非负可测函数，因此 $\forall T>0$，$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t$ 或者为有限或者为 $+\infty$，且对变上限 T 几乎处处可导，进一步因 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t\xrightarrow{T\to\infty}+\infty$，则功率 P 为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t}{T}=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left|f\left(\frac{T}{2}\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|f\left(-\frac{T}{2}\right)\right|^2\right)$$

由于 $P<+\infty$，故 $\exists\ T_0>0$，当 $|t|>T_0$ 时

$$|f(t)|^2\leqslant 2P,\quad \text{即 } |f(t)|\leqslant\sqrt{2P}$$

又因 $f(t)$ 在 $[-T_0,T_0]$ 上连续，故有界，综上 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致有界。

引理 2　（维纳—辛钦相关定理[5]）相关函数 $R(\tau)$ 的付氏变换 $\hat{R}(\omega)=S(\omega)$；

笔者下面利用上述两个引理考察 $R(\tau)$ 的小波变换 $W_\Psi R(a,b)$ 与功率谱及时-频功率谱的关系：

定理 2

$$W_\Psi R(a,b)=\langle S(\omega),|a|^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega b}\hat{\Psi}(a\omega)\rangle=|a|^{\frac{1}{2}}e^{i\omega b}\langle S(\omega),\hat{\Psi}(a\omega)\rangle$$

证

$$W_\Psi R(a,b)=\langle R(\tau),\Psi_{a,b}\rangle=\langle\hat{R}(\omega),|a|^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega b}\hat{\Psi}(a\omega)\rangle=|a|^{\frac{1}{2}}e^{i\omega b}\langle S(\omega),\hat{\Psi}(a\omega)\rangle$$

由定理 2 及定理 1 即可得到相关函数 $R(\tau)$ 的小波变换 $W_\Psi R(a,b)$ 与时-频功率谱之间的关系，这个关系是很基本的，它的应用将在以后讨论。

定理 3

$$W_\Psi R(a,b)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\overline{W_\Psi g(a,b-t)}f(t)\mathrm{d}t$$

其中　$g(t)=\overline{f(-t)}$，$\Psi\in L^2(R)\cap L^1(R)$

证　$$W_\Psi R(a,b)=\frac{1}{\sqrt{C_\Psi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int_R\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\overline{f(t-\tau)}\mathrm{d}t\right)\cdot\overline{\Psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)}\mathrm{d}\tau$$

因为 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\overline{f(t-\tau)}\mathrm{d}t\right| \leqslant \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)\,\overline{f(t-\tau)}|\mathrm{d}t$

$$\leqslant \lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} M^2\mathrm{d}t}{T} = M^2 \quad （由引理 1）$$

故 $\left|\int_R\left(\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\overline{f(t-\tau)}\mathrm{d}t\,\overline{\Psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)}\right)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant M^2\int_R\left|\Psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}\tau < +\infty$

故由 Fubini 定理有：

$$W_\Psi R(a,b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Psi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,\overline{\Psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)}\mathrm{d}\tau}\right)\cdot f(t)\mathrm{d}t$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\Psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi\left(\frac{t-x-b}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(-x)}\,\overline{\Psi\left(\frac{x-(b-t)}{a}\right)}\mathrm{d}x}$$

$$= \overline{\langle\overline{f(-x)},\Psi\left(\frac{x-(b-t)}{a}\right)\rangle} = \overline{W_\Psi g(a,b-t)}$$

由此即知结论成立。

参 考 文 献

1 Meyer Y. Wavelets——Algorithms & Applications. SIAM. 1993, 1～133

2 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, 1993. 1～22

3 Daubechies I. Orthonomal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure and Appl. Math. 1988, (41): 909～996

4 Mallat S. G. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ Trans. of the AMS, 1989, (315): 69～87

5 Mallat S. G. A theory for multuresolution signal decomposition: The wavelet decomposition. IEEE Trnas. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, (11): 674～693

6 Chui K C. Introduction to Wavelets and Applications. Academic Press, 1992, 1～352

7 Wickerhauser M. V. Adapted wavelet analysis from theory to software. SIAM, 1994, 1～473

8 陈兆国．时间序列及其谱分析．北京：科学出版社，1988. 1～126