1996 年 7 月 重庆大学学报 （自然科学版） Vol. 19, №. 4
第 19 卷第 4 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Jul. 1996

12 60－65

经济批量问题中上界常数的存在性定理和算法*

Existence Theorem of Upper Bound Constant of Multiplier for ELSP and An Improved Algorithm

F224.0

熊中楷[①] 里奇曼[②]
Xiong Zhongkai R. C. Leachman
（① 重庆大学工商管理学院，重庆，630044；② 美国加州大学伯克利分校；第一作者 47 岁，男，副教授）

摘 要 给出了 ELSP 的一个有用的上界常数的存在性定理及证明，并以此为基础给出了一个求解 ELSP 的算法，还用例子表明：用这个算法可很快找到最优解。 经济数学

关键词 CIMS；工厂自动化；经济批量 存在性定理

中国图书资料分类法分类号 TP11；TP31

ABSTRACT In this paper we prove existence theorem of upper bound constant of multiplier for ELSP and propose an easily programmable algorithm for solving the problem of determining lot size for n items to be produced on a single machine based on the existence theorem. We give some interesting examples to show the bound constant is useful. In some cases we can find optimal solution immediately with the bound constant and it is difficult to find a feasible solution without this bound constant.

KEYWORDS CIMS; factory automation; ELSP

0 引 言

众所周知，计算机集成制造系统是当今工业发达国家工厂自动化的高技术热点，中国也在高科技发展规划——“863”规划中将其列为重点发展方向，并为此进行了巨额投资。工业工程的建模的研究丰富了制造系统的模型库，是国内外学者很感兴趣的课题。

单机器系统经济批量的有关问题是企业管理中一个重要问题，在 CIMS 应用工程开发中也具有实际应用意义，因此它吸引了国际众多著名学者的注意力，详见文献[1～4][6～10]. 对这个问题的讨论持续了 40 多年。美国北卡罗来纳州立大学著名教授 Elmaghraby (1978)曾系统总结了 ELSP 的一系列结果。

这篇论文给出了 ELSP 问题中的一个有用的上界常数的存在性定理及证明，并以此为理论基础发展了一个计算机程序解答 ELSP，还给出例子表明在一些情况下，此算法可很快

* 收文日期 1995-10-18

求出最优解，若不用常数上界，甚至连可行解都找不到。

1 问　题

如下例子表明在一些情况下，文献[1]给出的算法不能运行。

例 1　设 $d_1 = d_2 = d_3 = 1, P_1 = 3, P_2 = P_3 = 4, h_1 = 1, h_2 = h_3 = 1000, c_1 = 3333, c_2 = c_3 = 15, t_s^1 = t_s^2 = t_s^3 = 0.001$.

在本文中，d_i 是产品 i 的需求率，P_i 是产品 i 的生产率，h_i 是产品 i 的单位存贮费用，c_i 是把机器转换生产产品 i 的转换费用，t_s^i 是产品 i 转换所需时间。

分析：根据文献[1]，第 1 步，对每种产品 i 计算出该产品的周期长度 T_i^*：

$$T_1^* = 100, T_2^* = 0.2, T_3^* = 0.2$$

第 2 步，把最小的 $T_i^* = 0.2$，选作初始基本周期长度 T.

第 3 步，决定在整个周期中，产品 i 两次生产相隔的基本周期数 m_i：

$$m_1 = 256, m_2 = m_3 = 1$$

第 4 步，由第 3 步求出的 m_i 值算出新的 T 值．$T = 0.23$，对应于这些 m_i 和 T 值的费用为 379.

第 5，6 步，改变 m_i、T 不能减少总费用。

第 7 步，由 t_s^i、m_i、d_i、p_i 和 T，可以决定机器时间 t_m^i：$t_m^1 = 19.64, t_m^2 = t_m^3 = 0.07$.

但找不到可行解，转第 8 步。

第 8 步，增加 T，仍找不到可行解。

为什么例 1 没有找到可行解呢？笔者将在上界常数存在性定理 2 的推论之后回答这个问题。例 1 的数据较特殊，如下例表明，即使数据很一般，对应的 m_i 也很小，我们仍然不能通过增加 T 来求出可行解。

例 2　某一台机器生产 8 种产品。

设　$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 1$

$P_1 = 3, P_2 = P_3 = P_4 = 5, P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = 100,$

$t_s^1 = t_s^2 = t_s^3 = t_s^4 = t_s^5 = t_s^6 = t_s^7 = t_s^8 = 0.001$

并设 c_i，h_i 的值计算出 m_i 为

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2, m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 1$$

分析：由于 $t_s^1 + m_1 \frac{d_1}{P_1}T + t_s^j + m_j \frac{d_j}{P_j}T \leqslant T$，$j = 2$ 或 3 或 4，那么 $\frac{16}{15}T < T$，此式对任何 $T > 0$ 都不成立。

一般说来，对由给定条件推算出的 $\vec{m} \equiv (m_1, m_2, \cdots, m_n)$，可求出对应所有可行安排中最

小的 T，记为 $T_{\min}(\vec{m})$ 和对应最小费用的最优的 T，记为 $T^*(\vec{m})$（见文献[1]中的(8)式）及费用曲线：

第 1 种情况（详见图 1）：　$T^*(\vec{m}) \leqslant T_{\min}(\vec{m})$

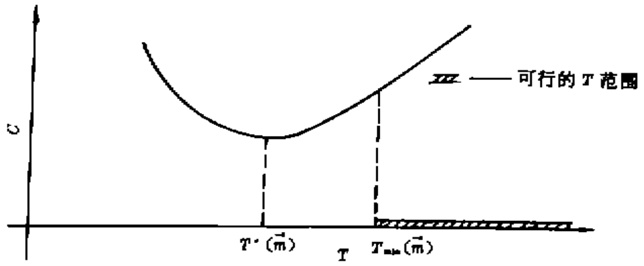

图 1　基本周期长度 T 与费用 C 的函数关系图

（当 $T^*(\vec{m}) \leqslant T_{\min}(\vec{m})$）

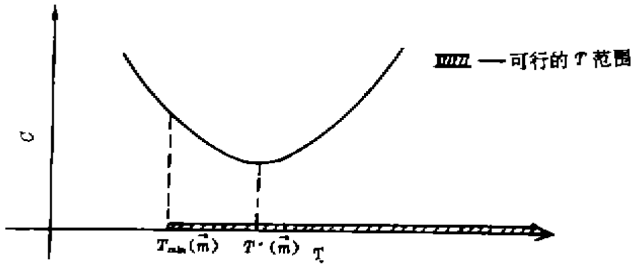

图 2　基本周期长度 T 与费用 C 的函数关系图

（当 $T^*(\vec{m}) > T_{\min}(\vec{m})$）

第 2 种情况（详见图 2）：$T^*(\vec{m}) > T_{\min}(\vec{m})$第 3 种情况：对应于 $\vec{m}$，任何 T 都不可行。

2　主要定理

设$[x]^-$（$\{x\}^-$）是小于或等于 x 的最大整数。现在我们可以给出主要定理：

定理 1　1）$m_i \leqslant p_i/d_i$　　(1)

2）$m_i \leqslant \bar{m}_i$，这里

$$\bar{m}_i \triangleq \{[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] / (d_i/p_i)\}^- \tag{2}$$

3）如果 $t_s > 0$，并且

$$[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] / (d_i/p_i) = \{[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] / (d_i/p_i)\}^- \tag{3}$$

那么 $m_i < \bar{m}_i$

证明：

1）由于 $t_s + m_i(d_i/p_i)T < T$

$$m_i < \frac{T - t_s}{(d_i/p_i)T} \leqslant p_i/d_i \tag{4}$$

2）对于任何产品 i，总存在着产品 j，使得 i，j 在同一基本周期里生产，即是说，

$$[t_s^i + (d_i/p_i)m_iT] + [t_s^j + (d_j/p_j)m_jT] \leqslant T \tag{5}$$

从而有

$$[t_s^i + (d_i/p_i)m_iT] + [t_s^j + \min_{j\neq i}(d_j/p_j)T] \leqslant T \tag{6}$$

注意到 m_i 是正整数，故有

$$\begin{aligned} m_i &\leqslant \{[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] \,/\, (d_i/p_i)\}^- \triangleq \bar{m}_i \\ &< \{[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] \,/\, (d_i/p_i)\} \end{aligned} \tag{7}$$

3）反证法，假定 $m_i = \bar{m}_i$

则有
$$\begin{aligned} m_i = \bar{m}_i &= \{[1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] \,/\, (d_i/p_i)\}^- \\ &= [1 - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)] \,/\, (d_i/p_i) \\ &= [T - \min_{j\neq i}(d_j/p_j)T] \,/\, (d_i/p_i)T \end{aligned}$$

于是

$$m_i(d_i/p_i)T + \min_{j\neq i}(d_j/p_j)T = T \tag{8}$$

$$m_i(d_i/p_i)T + t_s^i + \min_{j\neq i}(d_j/p_j)T > T \tag{9}$$

故有 $m_i < \bar{m}_i$

定理 1 的推论：如果$\frac{d_{i0}}{p_{i0}} = \max_j\{d_j/p_j\} \geqslant \frac{1}{2}$，则

1）$\bar{m}_{i0} \equiv 1$

2）$\forall\, i \neq i_0, \bar{m}_i = \{(1 - \max_j\{d_j/p_j\}) \,/\, (d_i/p_i)\}^-$ (10)

证明：　1）由定理 1 直接得到。

2）对任何 $i \neq i_0$

$$[t_s^{i0} + (d_{i0}/p_{i0})T] + [t_s^i + m_i(d_i/p_i)T] \leqslant T \tag{11}$$

故有
$$\bar{m}_i = \{[1 - \max_j(d_j/p_j)] \,/\, (d_i/p_i)\}^-$$

注意：1）实际上，$m_i \leqslant \{T - t_s^i - \min_{j\neq i}[t_s^j - (d_j/p_j)]T\} \,/\, (d_i/p_i)T$

2）$\bar{m}_i$ 是独立于 T 和费用的。

定义 $N_i \triangleq \{k \mid m_k = i\}$

定理 2　给定 $\vec{m} \triangleq (m_1, m_2, \cdots, m_k)$，$\forall\, j \notin N_1$

$$\sum_{i\in N_1}\left(t_s^i + \frac{d_i}{p_i}T\right) + \left(t_s^j + m_j\frac{d_j}{p_j}T\right) \leqslant T \tag{12}$$

证明：对于给定 $\vec{m} \triangleq (m_1, m_2, \cdots, m_k)$，由于任何满足 $m_j > 1$ 的产品 j 都是与满足 $m_i = 1$ 的产品 i 在同一周期里生产，故有此结论。

定理 2 推论：对任何 $j \notin N_1$

$$m_j \leqslant [1 - \sum_{i\in N_1}(t_s^i/T + d_i/p_i)] \,/\, (d_j/p_j) \tag{13}$$

或

$$m_j \leqslant [1 - \sum (d_i/p_i)] / (d_j/p_j)$$

在例 1 中，根据定理 1，可以算得 $\overline{m}_1 = 2, \overline{m}_2 = 2, \overline{m}_3 = 2$。但由[1]，$m_i$ 的初始值 $m_1 = 256 \gg \overline{m}_1$，根据定理 2，我们知道本例的不可行解有 3 个：

$(m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 2)$，$(m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 1)$，$(m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 1)$。我们可以非常容易地通过比较 4 个可行解的总费用而得到确定的最优解。由此可见，这两个定理对于寻找最优解是非常有用的。这 4 个可行解是 $(m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1)$，$(m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 1)$，$(m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2)$，$(m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 2)$。

文献[11]说，"本算法由文献[13]得到的可行安排开始，并且在可行域中改善可行安排，直到不能再改善为止。"这篇论文的基本假定是文献[13]可以得到一个可行安排。下面的例子表明这个假定是不成立的，从而文献[11]的算法有时无法求解。

例 3　除了 $t_1^s = 1, t_2^s = 1, t_3^s = 1$ 之外，例 3 的所有数据与例 1 相同。

正如上面分析，根据定理 1 和定理 2，我们只有 4 个可行解：

$T \geqslant 18$，对应解 $(m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1)$

$T \geqslant 24$，对应解 $(m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 1)$

$T \geqslant 24$，对应解 $(m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2)$

$T \geqslant 24$，对应解 $(m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 2)$

但是根据文献[13]，$T = 2.12$，这表明由文献[13]确定的解是不可行解。

3　新算法

第 0 步　对每一个产品 i，计算常数上界：

$$\overline{m}_i = \{[1 - \min_{j \neq i}(d_j/p_j)] / (d_i/p_i)\}^- \qquad (14)$$

设 $\overline{N}_i \triangleq \{k \mid \overline{m}_k = i\}$，for $j \in \overline{N}_1$，令 $m_j = 1$。

第 3 步　对 $i \notin \overline{N}_1$，决定值 b_i' 和 b_i''。b_i'，b_i'' 选自集合 $\{1, 2, 4, 8, \cdots\}$，使得 $b_i' < \frac{T_i^*}{T} \leqslant 2b_i'$，而且 $2^l \leqslant \overline{m}_i < 2^{l+1}$，使 $b_i'' = 2^{l-1}$，然后取 $b_i = \min\{b_i', b_i''\}$。

第 6 步　检查以便确定由现在的 m_i 和 T 得到的总费用是否能通过同时改变 $m_i (m_i \leqslant \overline{m}_i)$ 和 T 被减少。

第 8 步　考虑每一个 j_0 满足 $m_{j0} \geqslant 2$

设 $F(j_0) \triangleq$ {除 j_0 以外的所有必须与 j_0 在同一周期里生产的产品}。

检查是否有

$$\sum_{i \in F(j_0)} \left(t_i^s + \frac{d_i}{p_i} m_i T \right) + \left(t_{j0}^s + m_{j0} \frac{d_{j0}}{p_{j0}} T \right) \geqslant T$$

设　$G(j_0) \triangleq \{j_0\} \cup \{j \mid j \in F(j_0)$ 并且 $m_j \geqslant 2\}$，系统地减少 $m_i, i \in G(j_0)$ 使得

$$\sum_{i\in F(j_0)}\left(t_s+\frac{d_i}{p_i}m_iT\right)+\left(t_s^{j0}+m_{j0}\frac{d_{j0}}{p_{j0}}T\right)<T \tag{15}$$

如果得到一个可行分配，则停止。否则，系统增加基本周期时间 T，如果得到可行分配，则停止，否则，系统减少 m_i，直到求出可行解。如果这是第一次求出可行解或者这次求出的解比以前求出的最优解更好，则贮存此解。

4 结　论

证明了 ELSP 中的一个非常有用的上界常数的存在性定理并且以此为理论基础发展了一个算法以解决 ELSP. 举例表明在一些情况下，用此算法可很快得到最优解，若不用笔者的上界常数，则甚至求不出可行解。

致谢：感谢美国跨国半导体公司 Intel Corporation，Harris Corporation，Advanced Micro Devices，Inc. 和伯克利加州大学的资助，也感谢审稿人的有益建议。

参 考 文 献

1 Haessler R W. An Improved Extended Basic Period Procedure for Solving the Economic Lot Scheduling Problem, AIIE, Transaction, 1979, 11, 336～340

2 Bomberger, Earl. A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem, Management Science, 1966, 12, 778～784

3 Doll C L, Whybark D C. An Iteractlre Procedure for the Single-machine, Multi-Product lot Scheduling Problem, Management Science, 1973, 20, 50～55

4 Eilon S. Elements of Production Planning and Control, MacMillan, New York: 1962 Chapter 14

5 Elmaghraby S E. The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP): Review and Extensions, Management Science, 1978, 24(6): 587～598

6 Elmaghraby S E. An Extended Basic Period Approach to the Economic Lot Scheduling Problem (ELSP), Proceding of the Fourth International Conference on Production Research, Tokyo, Japan. 1977, 8, 27～30

7 Fujita S. The Application of Marginal Analysis of the Economic Lot Scheduling Problem. AIIE Tromsactions. 1978, (10): 354～361

8 Haessler R W, Hogue S. A Note on the Single-machine, Muti-Product Lot Scheoluling Problem, Mangement Science, 1976, (22): 909～912

9 Madigan J G. Scheduling a Multi-Product Single Machine System for an infinite Planning Period. Management Science. 1968, (14): 713～719

10 Rogers jack. A Computational Approach to the Economic Lot Scheduling Problem, Management Science, 1958, (4): 264～291

11 Park, S and D K Yun. A Stepwise Partial Enumeration Algorithm for the Economic Lot Scheduling Problem, IIE, Transactions, 1985, 16, 363～370

12 Davis, S G. Scheduling Economic Lot Size Production Runs, Management Science, 1990, 36, 985～998

13 Hanssman F. Operations Research in Production and Inrentory, John Wiley and Sons, New York, 1962, 158～160