1996年9月 重庆大学学报（自然科学版） Vol. 19, №. 5
第19卷第5期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Sep. 1996

(7) 42—47

RC电网络与粘弹性的数学联系研究*

The Research of the Mathematical Relationship Between RC Electrical Network and Viscoelasticity

TM 133 60

蔡坤宝[①] 杨瑞芳[②] 卢晓[②] 俞集辉[①] 王公瑞[②]
Cai Kunbao Yang Ruifang Lu Xiao Yu Jihui Wang Gongrui

O37

（① 重庆大学电气工程系，重庆，630044；② 重庆大学生物工程研究院；第一作者46岁，男，副教授 硕士）

4 **摘 要** 推广应用了电网络中的对偶原理，建立了线性粘弹性模型与RC(Resistor-Capacitor)电网络间的对应关系，进而证明了任意复杂的广义线性粘弹性模型均可归结为广义的Voigt链。

关键词 粘弹性理论；电路理论／广义的线性粘弹性模型 RC电网络

中国图书资料分类法分类号 O37；TM133

ABSTRACT The duality principle in electrical network was generalized to establish the one-to-one correspondence between generalized linear viscoelastic model and RC electrical network. On this basis, a guess was proved to be true that any generalized linear viscoelastic model with arbitrary complexity can be simplified as generalized Voigt chain equivalently.

KEYWORDS viscoelastic theory; circuit theory / generalized linear viscoelastic model

0 引 言

两个完全不同的物理系统的现象若能由相同的数学方程所描述，我们就说，这两个系统是相似的。例如在力学、电学和声学系统之间，存在着相似性。众多的相似系统，显然为我们在研究某一物理系统时，可借助于人类在其相似系统中研究的智慧结晶，用以解决所研究的物理系统中不易解决的问题。

在流变中，广义的线性粘弹性模型用以描述一般的线性粘弹性介质的流变性质，并可由此建立本构方程。欲借用电网络的理论研究流变介质的力学性质，其关键之处在于建立广义的线性粘弹性模型与电网络之间的一一对应关系。

笔者的研究结论是，广义的线性粘弹性模型对偶于RC无源一端口网络，流变力学的两个重要函数，即蠕变函数与松弛函数分别对应于RC无源网络的两个策动点响应函数。从而，一些在力学模型中不易证明的性质，在RC电网络中变得一目了然。在此基础上，本文作者证明了，任意复杂的广义线性粘弹性模型均可归结为广义的Voigt链。

* 收文日期 1995-06-21
国家教委留学回国人员科研基金、国家自然科学基金资助项目

1 广义的线性粘弹性模型

基本的线性粘弹性模型有三种：Maxwell 体、Voigt 体和 Kelvin 体[1~4]。上述三种模型均由两种基本元件，即线性弹簧与阻尼器构成。将两种基本元件与三种基本模型作任意联接所得的模型，称之为广义的线性粘弹性模型，可用以描述最一般的线性流变介质的动态特性。

在复频域中，广义的线性粘弹性模型的本构方程的一般形式如下

$$P(s)\sigma(s) = Q(s)\varepsilon(s) \tag{1}$$

其中

$$P(s) = \sum_{k=0}^{m} p_k s^k, \qquad Q(s) = \sum_{k=0}^{n} q_k s^k \tag{2}$$

且 $p_0 = 1$，p_k 和 q_k 均为实数，$\sigma(s)$ 和 $\varepsilon(s)$ 分别为复频域应力和应变。

在复频域中，定义系统函数

$$H_\varepsilon(s) \triangleq \varepsilon(s) / \sigma(s) = P(s)/Q(s) \tag{3}$$

即定义单位冲激应力激励下，应变的零状态响应的拉氏变换为广义的线性粘弹性模型的系统函数。

定义广义的 Voigt 链如图 1 所示。

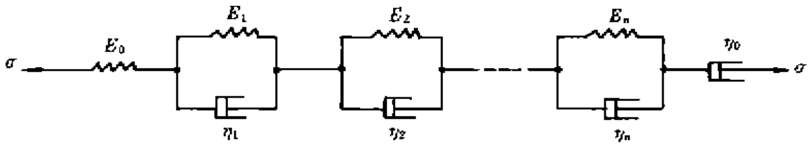

图 1　广义的 Voigt 链

并将图 1 所示的模型本身；或 $E_0 = \infty$ 时的模型；或 $\eta_0 = \infty$ 时的模型；或 $E_0 = \infty$ 且 $\eta_0 = \infty$ 时的模型(Voigt 链)，这四种可能的模型结构统称为广义的 Voigt 链。

由广义的 Voigt 链的定义易知，其系统函数为

$$H_\varepsilon(s) = \varepsilon(s)/\sigma(s) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\eta_0 s} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{E_i + \eta_i s} \tag{4}$$

且易于写成式(3)所示的形式。

定义广义的 Voigt 链的意义在于，笔者猜侧任意复杂的广义的线性粘弹性模型均可等效为广义的 Voigt 链，但在力学系统中直接证明似乎有些困难。依据相似性原理、应用电网络的对偶原理，将力学网络转换成电 网络，笔者的猜侧被证明是完全正确的。

2 流变力学的两个重要函数

线性粘弹性动态特性的测试及其模型参数的辨识，基于如下两个重要的流变力学函数，即蠕变函数及松驰函数[4,5]。借用理论电工的术语，或许能为这两个函数下更为确切的定义。

1）蠕变函数

任意处于自然状态的线性粘弹体，在单位阶跃应力激励下的应变响应，定义为该粘弹体

的蠕变函数,并简记为 $J(t)$.

在复频域中,蠕变函数与系统函数的关系为

$$J(s) = \mathscr{L}[J(t)] = \frac{1}{s} \cdot H_\varepsilon(s) = P(s)/sQ(s) \tag{5}$$

2) 松弛函数

任意处于自然状态的线性粘弹体,在单位阶跃应变激励下的应力响应,定义为该粘弹体的松弛函数,并简记为 $Y(t)$ 或 $G(t)$.

在复频域中,松弛函数与系统函数的关系为

$$Y(s) = \mathscr{L}[Y(t)] = 1/s \cdot H_\varepsilon(s) = Q(s)/sP(s) \tag{6}$$

由式(5)和(6)可得

$$J(s) \cdot Y(s) = 1/s^2 \tag{7}$$

3 广义的线性粘弹性模型的对偶电网络

我们在复频域中找出由广义的线性粘弹性模型确定对偶电网络的普适方法。

3.1 基本元件的对偶关系

1) 线性弹簧与线性电容

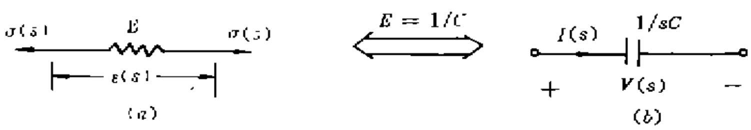

图 2 线性弹簧与线性电容对偶

线性弹簧的系统函数为

$$H_\varepsilon(s) = \varepsilon(s)/\sigma(s) = 1/E \tag{8}$$

线性电容的系统函数为($Q(s) = I(s)/s$)

$$H_Q(s) = Q(s)/V(s) = C \tag{9}$$

或

$$H_I(s) = I(s)/V(s) = sC \tag{10}$$

显然,若在量值上令

$$E = 1/C \tag{11}$$

则在函数表达式上有(不考虑量纲)

$$H_\varepsilon(s) = H_Q(s) = H_I(s)/s \tag{12}$$

2) 阻尼器与线性电阻

阻尼器的系统函数为

$$H_\varepsilon(s) = \varepsilon(s)/\sigma(s) = 1/\eta s \tag{13}$$

线性电阻元件的系统函数为

$$H_Q(s) = Q(s)/V(s) = 1/Rs \tag{14}$$

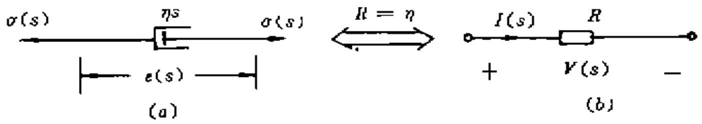

图 3　阻尼器与线性电阻对偶

或

$$H_I(s) = I(s)/V(s) = 1/R \tag{15}$$

若在量值上令

$$\eta = R \tag{16}$$

则在函数表达式上有

$$H_\varepsilon(s) = H_Q(s) = H_I(s)/s \tag{17}$$

综上所述，线性粘弹性模型的基本元件与电网络的基本元件存在如表 1 所示的互为对偶关系。

表 1　基本元件的对偶关系

力　学　系　统	电　学　系　统
应力 $\sigma(t)$ 或 $\sigma(s)$	电压 $V(t)$ 或 $V(s)$
应变 $\varepsilon(t)$ 或 $\varepsilon(s)$	电荷 $\underset{\sim}{Q}(t)$ 或 $\underset{\sim}{Q}(s)$
应变率 $\dot{\varepsilon}(t)$ 或 $s\varepsilon(s)$	电流 $I(t) = \mathrm{d}\underset{\sim}{Q}(t)/\mathrm{d}t$ 或 $I(s) = s\underset{\sim}{Q}(s)$
弹性模量 E	倒电容 $1/C$
粘滞系数 η	电阻 R
若上述两列的变量与参数互为对偶，则有如下元件对偶	
线性弹簧	电容
阻尼器	电阻

3.2　网络的对偶结构

为了推广应用电网络理论中，由给定电网络找出其对偶电网络的规范化方法，在图 4 所示的 Voigt 模型网络中，我们用虚线以及虚设的力源，将其构成一封闭的力学模型网络，并规定力源由一圆圈和一对箭头表示，当一对箭头指向圆圈时，表示介质承受拉应力，反之承受压应力。图 4 所示两网络的对偶关系如表 2 所示。

推而广之，由任意复杂的线性粘弹性模型网络找出其对偶的 RC 电网络的步骤与文献[6]中给出的，由电网络找出其对偶电网络的步骤完全相同。须注意的是，当力学网络中力源为拉应力源时，对偶电网络的端口电压与电流的参考方向如图 4(b) 所示。反之，当力源为压应力源时，则应将端口电压源反相。

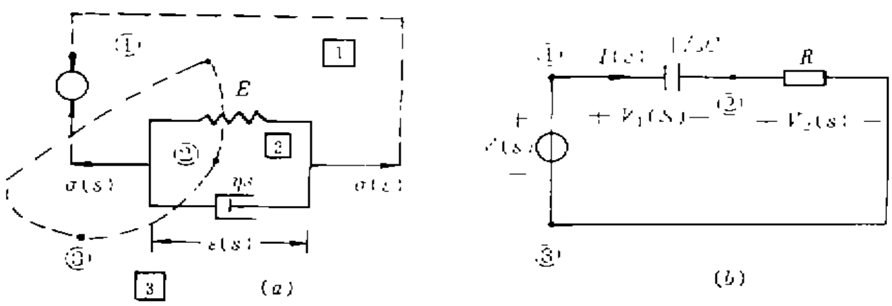

图 4 网络的对偶

表 2 网络的对偶关系

线性弹簧与阻尼器并联	电容与电阻串联
网孔 1	节点 ①
网孔 2	节点 ②
外网孔 3	节点 ③(参考节点)
力源 $\sigma(s)$	电压源 $V(s)$
$H_\varepsilon(s) = 1/(E + \eta s)$	$H_Q(s) = 1/\left(\frac{1}{C} + Rs\right)$

事实上，力学网络与电学网络构成互为对偶的网络对，即由电学网络亦可找出其对偶的力学网络。如表 3 所示，互为对偶网络的两列函数均为 s 的有理函数，并分别对应相等。

表 3 网络函数的对偶关系

力学网络	电学网络
$H_\varepsilon(s)$	$H_Q(s) = H_I(s)/s$
$J(s) = H_\varepsilon(s)/s$	$H_Q/s = H_I(s)/s^2$
$Y(s) = 1/sH_\varepsilon(s)$	$H_V(s) = V(s)/I(s) = 1/H_I(s)$

4 RC 网络与广义的 Voigt 链

按上述步骤，任意复杂的广义线性粘弹性模型网络均可找出如图 5 所示的、对偶的 RC 电网络。RC 网络的策动点导纳 $Y_{RC}(s)$ 的普遍公式为

$$
\begin{aligned}
Y_{RC}(s) &= I(s)/V(s) \\
&= K\frac{(s+\omega_{o1}^2)(s+\omega_{o2}^2)\cdots(s+\omega_{om}^2)}{(s+\omega_{p1}^2)(s+\omega_{p2}^2)\cdots(s-\omega_{pn}^2)} \\
&= K_\infty s + K_0 + \frac{K_1 s}{s+\omega_{p1}^2} + \frac{K_2 s}{s+\omega_{p2}^2} + \cdots + \frac{K_n s}{s+\omega_{pn}^2}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

按式(18) 可直接综合出如图 6 所示的福斯特 2 型 RC 网络[7,8]。

根据表 3，式(18) 以及 RC 网络策动点导纳函数的定义可知，就函数的表达式上有如下关系

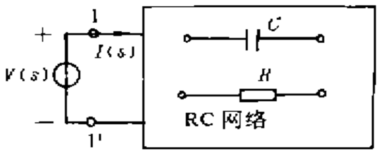

图 5　RC 策动点函数

$$H_e(s) = H_0(s) = H_I(s)/s = Y_{RC}(s)/s \quad (19)$$

按图 6，式(18) 可改写为

$$Y_{RC}(s) = sC_\infty + \frac{1}{R_0} + \sum_{i=0}^{n} \frac{s}{1/C_i + R_i s} \quad (20)$$

若令 $C_\infty = 1/E_0$，$R_0 = \eta_0$，$C_i = 1/E_i$，$R_i = \eta_i$，则由式(19)和(20) 可得式(4)，并由式(4) 可直接画出图 1 所示的广义的 Voigt 链。

综上所述，证明了一个重要结论：由基本的线性弹簧和阻尼器元件，以及三种基本的模型组成的任意复杂的广义的线性粘弹性模型，均可等效为如图 1 所示的广义的 Voigt 链，而系统函数的一般形式如式(4) 所示。

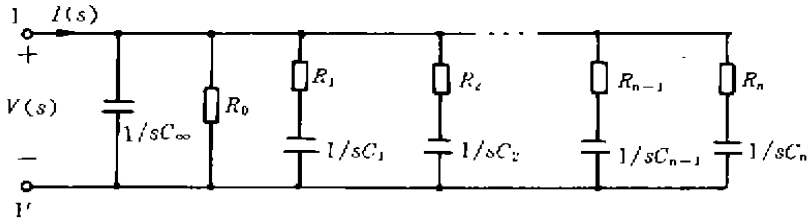

图 6　RC 网络的福斯特 2 型实现

5　结　　论

本文的研究结果对于进一步研究广义的线性粘弹性模型的性质，无疑是十分有益的。尤其是，对于线性粘弹性介质的建模，可消去模型结构选择的盲从性。由于广义的 Voigt 链的元件均为独立元件，从而排除了冗余参数的辨识。在线性粘弹性波动的有限元分析中，广义的 Voigt 链的概念，将使得滤波运算规范化。

参 考 文 献

1　Flügge W. Viscoelasticity. Second Revised Edition. New York：Springer-Verlag，1975. 1～31

2　尹祥础．固体力学．北京：地震出版社，1985. 337～370

3　Fung Y C. Biomechanics：Mechanical Properties of Living Tissues. New York：Springer-Verlag，1981. 41～56

4　冯元桢．生物力学．北京：科学出版社，1983. 103～115

5　Fung Y C. Foundations of Solid Mechanics. New Jersey：Prentice-Hall，Inc.，Englewood Cliffs，1965. 412～423

6　江泽佳．电路原理，上册．北京：人民教育出版社，1979. 192～199

7　颜绍书．网络综合理论．北京：电子工业出版社，1985. 41～54

8　上海铁道学院主编．网络综合理论．北京：中国铁道出版社，1979. 23～36