12 68 75

一种模糊随机有限元法*

A Fuzzy Stochastic Finite Element Method

O159

吕恩琳
Lu Enlin
(重庆大学工程力学系,重庆,630044;49 岁,男,副教授)

A

摘　要　对模糊随机有限元平衡方程作入水平截集,得随机区间方程,将该方程中的刚度矩阵、载荷列阵和节点位移列阵在初始随机向量的均值处展开,利用区间数分解和小参数摄动理论导出求解随机区间方程的递归方程组,还推导了计算模糊随机位移、应变和应力统计特征的计算公式。

关键词　模糊随机有限元;区间数分解;摄动法
中国图书资料分类法分类号　O159

ABSTRACT　By λ-level cutset the fuzzy stochastic finite element equilibrium equations, a stochastic interval equations is obtained. Expanding the stiffness matrix, displacement vector and loading vector existed in the interval equations at the expectation value of the initial random vector, then using resolution of interval numbers and perturbation theory for small parameters, a set of recursive equations for solving the stochastic interval equations is developed in the present paper. The formulas for calculating the statistical characteristics of fuzzy stochastic nodal displacement and fuzzy stochastic element strain and stress are also devoloped for details in this article.

KEYWORDS　fuzzy stochastic finite element; resolution of interval numbers; perturbation theory

0　引　　言

在工程结构分析中往往有许多参数同时具有随机性和模糊性,这时需要使用模糊随机有限元法。笔者研究了当结构材料特性、几何特性及载荷特性中的某些参数取值具有模糊性,而其概率为清晰值时结构响应的求法,用模糊分解定理、区间数的分解方法和小参数摄动法推导了模糊随机有限元法的递归方程组,并给出了求节点位移、单元应变和应力数字特征的计算公式。分析表明,模糊随机有限元法是随机有限元法[1]和模糊有限元法的推广。

* 收文日期　1996-05-06
国家自然科学基金资助课题

1　模糊随机参数的数学描述[2,3]

由文献[2,3]，模糊随机参数的数学描述方法可概述如下：

1.1　模糊随机变量

模糊随机变量有多种定义，由 Kwakernaak 引入的模糊随机变量的定义为设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 为概率测度空间，模糊集值映射 $\underset{\sim}{X}:\Omega\to F_0(R)=\{\underset{\sim}{A}\,|\,\underset{\sim}{A}$ 是有界闭模糊数$\}$ 称为 (k) 模糊随机变量，如果

1) 对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\underline{X}_\lambda(\omega)$，$\overline{X}_\lambda(\omega)$ 为 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的随机变量；

2) 对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\underline{X}_\lambda(\omega)$，$\overline{X}_\lambda(\omega)\in X_\lambda(\omega)$。

其中

$$\underline{X}_\lambda(\omega)=\inf X_\lambda(\omega)=\inf\{X\in R\,|\,\underset{\sim}{X}(\omega)(x)\geqslant\lambda\}$$

$$\overline{X}_\lambda(\omega)=\sup X_\lambda(\omega)=\sup\{X\in R\,|\,\underset{\sim}{X}(\omega)(x)\geqslant\lambda\}$$

$X_\lambda(\omega)$ 是 $\underset{\sim}{X}(\omega)$ 的 λ 水平截集；$\underset{\sim}{X}(\omega)(x)$ 是 $\underset{\sim}{X}(\omega)$ 的隶属函数。由该定义可知，若 $\underset{\sim}{X}$ 是 (k) 模糊随机变量，则对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$X_\lambda(\omega)=[\underline{X}_\lambda(\omega),\overline{X}_\lambda(\omega)]$ 不仅是一个闭区间数，而且是一个随机区间，即 $\underline{X}_\lambda(\omega)$，$\overline{X}_\lambda(\omega)$，都是 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的随机变量。

对于向量 $\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}(1),\cdots,\underset{\sim}{X}(n))$ 为概率测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的 n 维模糊随机向量的充要条件是每一个 $\underset{\sim}{X}(k)(k=1,\cdots,n)$ 为 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的模糊随机变量。

1.2　模糊概率特征

与普通随机变量和随机向量的数字特征相对应，模糊随机变量和模糊随机向量也可用其数字特征来描述。

设 $\underset{\sim}{X}$ 是概率测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的模糊随机变量，如果 $\underset{\sim}{X}$ 在 Ω 上关于 P 可积，则 $\underset{\sim}{X}$ 在 Ω 上的积分称为 $\underset{\sim}{X}$ 的数学期望，记作

$$E(\underset{\sim}{X})=\int_\Omega \underset{\sim}{X}(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$

可以证明，$E(\underset{\sim}{X})$ 仍是一有界闭模糊数，其 λ 水平截集为

$$\text{对}\ \forall\ \lambda\in(0,1],\ E_\lambda(\underset{\sim}{X})=E(X_\lambda)=[E(\underline{X}_\lambda),E(\overline{X}_\lambda)]\tag{1}$$

由模糊分解定理可知：

$$E(\underset{\sim}{X})=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[E(\underline{X}_\lambda),E(\overline{X}_\lambda)]$$

如果 $\underset{\sim}{X}$ 是 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的离散型模糊随机变量，并且 $p(\underset{\sim}{X}(\omega_i)=\underset{\sim}{A}_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $\underset{\sim}{A}_i\in\mathscr{F}_0(R)$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，则

$$E(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^{n}p_i\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_0(R)$$

并且对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$E_\lambda(\underset{\sim}{X})=[\sum_{i=1}^{n}p_i\underline{A}_{i\lambda},\sum_{i=1}^{n}p_i\overline{A}_{i\lambda}]$

对于概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的 n 维模糊随机向量，$\underset{\sim}{X}(\omega)=(\underset{\sim}{X}(1,\omega),\cdots,\underset{\sim}{X}(n,\omega))$，如果

每一个 $E[\underset{\sim}{X}(k,\omega)],(k=1,\cdots,n)$ 都存在，则称 $(E(\hat{X}(1,\omega)),\cdots,E(\underset{\sim}{X}_n(n,\omega)))$ 为 $\underset{\sim}{X}$ 的数学期望，并记为

$$E(\underset{\sim}{X})=[E(\underset{\sim}{X}(1)),\cdots,E(\underset{\sim}{X}(n))]$$

其 λ 水平截集为

$$E_\lambda(\underset{\sim}{X})=(E(X_\lambda))=(E(X_\lambda(1),\cdots,E(X_\lambda(n)))$$

并且称

$$\underset{\sim}{K}(j,k)\triangleq E[(\underset{\sim}{X}(j)-E(\underset{\sim}{X}(j)))(\underset{\sim}{X}(k)-E(\underset{\sim}{X}(k)))]$$

为 $\underset{\sim}{X}$ 的协方差，n 阶矩阵

$$\underset{\sim}{K}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{k}(1,1) & \underset{\sim}{k}(1,2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(1,n)\\ \underset{\sim}{k}(2,1) & \underset{\sim}{k}(2,2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(2,n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \underset{\sim}{k}(n,1) & \underset{\sim}{k}(n,2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(n,n)\end{bmatrix}$$

称为 $\underset{\sim}{X}$ 的协方差矩阵，$\underset{\sim}{k}(j,k)$ 的 λ 水平截集计算公式为

$$(\underset{\sim}{k}(j,k))_\lambda=k_\lambda(j,k)=$$

$$E([\underline{X}_\lambda(j)-E(\overline{X}_\lambda(j)),\overline{X}_\lambda(j)-E(\underline{X}_\lambda(j))]\cdot$$
$$[\underline{X}_\lambda(k)-E(\overline{X}_\lambda(k)),\overline{X}_\lambda(k)-E(\underline{X}_\lambda(k))]) \tag{2}$$

2　摄动模糊随机有限元法基本列式

2.1　模糊随机有限元平衡方程

在工程结构有限元分析中，结构的响应取决于结构自身的组成参数和外部环境条件。当这些参数或条件中的某一些或全部具有模糊随机性时，结构响应也必然具有模糊随机性。作静力分析时，结构平衡方程为：

$$[\underset{\sim}{K}]\{\underset{\sim}{U}\}=\{\underset{\sim}{P}\} \tag{3}$$

式中 $[\hat{K}]$ 是模糊随机刚度矩阵，其模糊随机性来自于材料性能参数、结构几何参数和位移边界条件；$\{\underset{\sim}{P}\}$ 是模糊随机载荷向量；$\{\underset{\sim}{U}\}$ 是模糊随机位移向量。对方程(3)作 λ 水平截集，得：

$$[\underline{K},\overline{K}]_\lambda\{\underline{U},\overline{U}]_\lambda\}=\{\underline{P},\overline{P}\}_\lambda \tag{4}$$

如能从上式求出 $\{U\}_\lambda=[\underline{U},\overline{U}]_\lambda$，则根据模糊分解定理有

$$\{\underset{\sim}{U}\}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\{U\}_\lambda \tag{5}$$

显然，模糊随机有限元法的关键在于求解方程(4)。

若结构的某一参数 $\underset{\sim}{z}$ 具有模糊随机性，意味着该参数的取值为模糊数，相应的概率为清晰数。于是对该参数建立随机场模型后，其扰动量就可以用一个随机小参数 α 来表示，即

$$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{Z}_0(1+\alpha)$$

其中 $\underset{\sim}{Z}_0$ 是一个模糊数，反映了 $\underset{\sim}{Z}$ 的模糊性；α 是均值为零的随机场，反映了 $\underset{\sim}{Z}$ 的随机性。$\underset{\sim}{Z}$ 的 λ 水平截集为：

$$Z_\lambda = [\underline{Z}_\lambda, \overline{Z}_\lambda] = [\underline{Z}_{0\lambda}(1+\alpha), \overline{Z}_{0\lambda}(1+\alpha)] \tag{6}$$

对随机场 α 离散后，α 可以化为随机向量 $\underset{\sim}{\alpha}$. 当有限元离散网格确定以后，刚度矩阵 $[\underset{\sim}{K}]$、荷载列阵 $\{\underset{\sim}{P}\}$ 和位移列阵 $\{\underset{\sim}{U}\}$ 的 λ 水平截集在 $\underset{\sim}{\alpha}$ 的均值处作泰勒级数展开，并略去二阶以上项，有：

$$\begin{aligned}
[\underline{K}, \overline{K}]_\lambda = [&K_0^- - \sum_{i=1}^{n} K_i^- \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^- \alpha_i\alpha_j,\\
&K_0^+ + \sum_{i=1}^{n} K_i^+ \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^+ \alpha_i\alpha_j],\\
\{\underline{P}, \overline{P}\}_\lambda = \{&P_0^- + \sum_{i=1}^{n} P_i^- \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}^- \alpha_i\alpha_j,\\
&P_0^+ + \sum_{i=1}^{n} P_i^+ \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}^+ \alpha_i\alpha_j\},\\
\{\underline{U}, \overline{U}\}_\lambda = \{&U_0^- + \sum_{i=1}^{n} U_i^- \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}^- \alpha_i\alpha_j,\\
&U_0^+ + \sum_{i=1}^{n} U_i^+ \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}^+ \alpha_i\alpha_j\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

式中 n 是 $\underset{\sim}{\alpha}$ 向量中随机变量总数，下标 i 和 j 表示对 α_i 和 α_j 求偏导数。

2.2　区间方程组的解

区间方程组的一般形式为

$$[\underline{A}, \overline{A}]\{\underline{X}, \overline{X}\} = \{\underline{B}, \overline{B}\} \tag{8}$$

$[\underline{A}, \overline{A}]$ 和 $\{\underline{B}, \overline{B}\}$ 为已知区间阵，$\{\underline{X}, \overline{X}\}$ 为待求区间列阵。按照区间数的分解定理有

$$\begin{aligned}
[\underline{A}, \overline{A}] &= A_m + \frac{1}{2}[-1, 1]A_w\\
\{\underline{B}, \overline{B}\} &= B_m + \frac{1}{2}[-1, 1]B_w\\
\{\underline{X}, \overline{X}\} &= X_m + \frac{1}{2}[-1, 1]X_w
\end{aligned} \tag{9}$$

式中 $A_m = \frac{1}{2}[\underline{A} + \overline{A}]$, $A_w = [\overline{A} - \underline{A}]$，余类推。将式(9)代入方程(8)，展开过程中忽略以分配律代替区间数运算的亚分配率而引起的误差，再根据区间数分解的唯一性，方程组(8)可化为如下的两个方程组[4]

$$\begin{aligned}
&A_m X_m = B_m\\
&(A_m + \frac{1}{2}A_w)X_w = B_w - A_w X_m
\end{aligned} \tag{10}$$

由第一个方程组求出 X_m 后再由第二个方程组可解出 X_w，而方程(8)的解为

$$\{\underline{X}, \overline{X}\} = X_m + \frac{1}{2}[-1, 1]X_w$$

2.3　求位移的递归方程组

将展开式(7)代入控制方程(4)，该区间方程组同样可以化为与式(10)具有相同形式的两个方程组，暂时省略下标 λ，它们分别为

$$
\begin{aligned}
&\Big[K_0^- + K_0^+ + \sum_{i=1}^{n}(K_i^- + K_i^+)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(K_{ij}^- - K_{ij}^+)\alpha_i\alpha_j\Big]\cdot \\
&\quad\Big\{U_0^- + U_0^+ + \sum_{i=1}^{n}(U_i^- + U_i^+)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(U_{ij}^- + U_{ij}^+)\alpha_i\alpha_j\Big\} = \\
&\quad\Big\{P_0^- + P_0^- + \sum_{i=1}^{n}(P_0^- + P_i^-)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P_{ij}^- + P_{ij}^+)\alpha_i\alpha_j\Big\} \\
&\Big[K_0^+ + \sum_{i=1}^{n}K_i^+\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^-\alpha_i\alpha_j\Big]\cdot \\
&\quad\Big\{U_0^+ - U_0^- + \sum_{i=1}^{n}(U_i^+ - U_i^-)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(U_{ij}^+ - U_{ij}^-)\alpha_i\alpha_j\Big\} = \\
&\quad\Big\{P_0^+ - P_0^- + \sum_{i=1}^{n}(P_i^+ - P_i^-)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P_{ij}^+ - P_{ij}^-)\alpha_i\alpha_j\Big\} - \\
&\quad\frac{1}{2}\Big[K_0^+ - K_0^- + \sum_{i=1}^{n}(K^- - K^-)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(K_{ij}^+ - K_{ij}^-)\alpha_i\alpha_j\Big]\cdot \\
&\quad\Big\{U_0^+ - U_0^- + \sum_{i=1}^{n}(U_i^- + U_i^-)\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(U_{ij}^+ + U_{ij}^-)\alpha_i\alpha_j\Big\}
\end{aligned}
$$

将以上两方程展开、根据摄动法原理、便可得到如下的递归方程组

$$
\begin{aligned}
&[K_0^- + K_0^+]\{U_0^- + U_0^+\} = \{P_0^- - P_0^+\} \\
&[K_0^- + K_0^+]\{U_i^- + U_i^+\} = \{P_i^- + P_i^+\} - [K_i^- + K_i^+]\{U_0^- + U_0^+\} \\
&[K_0^- + K_0^+]\{U_{ij}^- + U_{ij}^+\} = \{P_{ij}^- + P_{ij}^+\} - [K_i^- + K_i^+]\{U_j^- + U_j^+\} - \\
&\qquad [K_j^- + K_j^+]\{U_i^- + U_i^+\} - [K_{ij}^- + K_{ij}^-]\{U_0^- + U_0^+\} \\
&[K_0^+]\{U_0^+ - U_0^-\} = \{P_0^+ - P_0^-\} - \frac{1}{2}[K_0^+ - K_0^-]\{U_0^- + U_0^+\} \\
&[K_0^+]\{U_i^+ - U_i^-\} = \{P_i^+ - P_i^-\} - \frac{1}{2}[K_0^+ - K_0^-]\{U_i^- + U_i^+\} - \\
&\qquad \frac{1}{2}[K_i^+ - K_i^-]\{U_0^- + U_0^-\} - [K_i^-]\{U_0^+ - U_0^-\} \\
&[K_0^+]\{U_{ij}^+ - U_{ij}^-\} = \{P_{ij}^+ - P_{ij}^-\} - \frac{1}{2}[K_0^+ - K_0^-]\{U_{ij}^- + U_{ij}^+\} - \\
&\qquad \frac{1}{2}[K_{ij}^+ - K_{ij}^-]\{U_0^+ - U_0^-\} - [K_i^+ - K_i^-]\{U_j^- + U_j^+\} - \\
&\qquad [K_j^+ - K_j^-]\{U_i^- + U_i^+\} - [K_{ij}^+]\{U_0^+ - U_0^-\} - \\
&\qquad [K_i^+]\{U_j^+ - U_j^-\}[K_j^-]\{U_i^+ - U_i^-\} \\
&\qquad\qquad i, j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{11}
$$

由上述方程组可依次求出$\{U_0^+ + U_0^-\}$、$\{U_0^+ - U_0^-\}$、$\{U_i^+ + U_i^-\}$、$\{U_i^+ - U_i^-\}$和$\{U_{ij}^+ + U_{ij}^-\}$、$\{U_{ij}^+ - U_{ij}^-\}$,进而可分别求出$\{U_0^+\}$、$\{U_0^-\}$、$\{U_i^-\}$、$\{U_0^-\}$、及$\{U_{ij}^+\}$、$\{U_{ij}^-\}$等量,这样就得到控制方程(4)的解。

当初始模糊随机参数 $\tilde{Z}$ 不是平模糊数[5]时，在式(6)中取 $\lambda=1$ 必有 $\underline{Z}_\lambda=\overline{Z}_\lambda$，从而也必有 $[\underline{K}]_\lambda=[\overline{K}]_\lambda$、$\{\underline{P}\}_\lambda=\{\overline{P}\}_\lambda$、$\{\underline{U}\}_\lambda=\{\overline{U}\}_\lambda$，此时方程组(11)与摄动随机有限元法求节点位移的递归方程组[1]是完全一致的。如果随机向量 $\tilde{\alpha}$ 为零向量，则有 $[\underline{K}]_\lambda=[K_0^-]_\lambda$、$[\overline{K}]_\lambda=[K_0^+]_\lambda$、$\{\underline{P}\}_\lambda=\{P_0^-\}_\lambda$、$\{\overline{P}\}_\lambda=\{P_0^+\}_\lambda$、和 $\{\underline{U}\}_\lambda=\{U_0^-\}_\lambda$、$\{\overline{U}\}_\lambda=\{U_0^+\}_\lambda$，于是方程组(11)与基于模糊分解定理和区间数分解的结构模糊有限元平衡方程解法的结果相同[1]。当同时取设防水平 $\lambda=1$ 及 $\tilde{\alpha}$ 为零得量时，方程组(11)退化为一般的有限元平衡方程。

2.4 位移、应变和应力的统计特征

由式(7)可得位移均值的 λ 截集为

$$E_\lambda(U)=[E(\underline{U}_\lambda),E(\overline{U}_\lambda)]=$$

$$[U_0^-+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ij}^-E(\alpha_i\alpha_j),U_0^++\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ij}^+E(\alpha_i\alpha_j)] \tag{12}$$

在计算位移协方差时，仅取位移的一阶近似式。由式(2)、(7)，位移向量的第 k、l 个分量间的协方差的 λ 截集为

$$\mathrm{Cov}(u_K,u_l)_\lambda=E[(\underline{u}_k-E(\overline{K}_k),\bar{u}_k-E(\underline{u}_k))\cdot$$
$$(\underline{u}_l-E(\overline{K}_l),\bar{u}_l-E(\underline{u}_l))]_\lambda$$

记

$$q=(u_{k0}^- - u_{k0}^+)_\lambda \qquad r=(u_{k0}^+ - u_{k0}^-)_\lambda$$
$$s=(u_{l0}^- - u_{l0}^+)_\lambda \qquad t=(u_{l0}^+ - u_{l0}^-)_\lambda$$

$$A=qs+(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{k,i}^-u_{l,j}^-E(\alpha_i\alpha_j))_\lambda$$

$$B=qt+(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{k,i}^-u_{l,j}^+E(\alpha_i\alpha_j))_\lambda$$

$$C=rs+(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{k,i}^+u_{l,j}^-E(\alpha_i\alpha_j))_\lambda$$

$$D=rt+(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{k,i}^+u_{l,j}^-E(\alpha_i\alpha_j))_\lambda$$

由区间数的乘法规则，得

$$\mathrm{Cov}(u_k,u_l)_\lambda=[\min\{A,B,C,D\},\max\{A,B,C,D\}] \tag{13}$$

$k,l=1,2,\cdots,nf$　　nf 为结构自由度总数

对任一单元 m，应变 e^m 的 λ 水平截集为

$$e_\lambda^m=B_\lambda^mU_\lambda^m \tag{14}$$

分别将 e_λ^m、B_λ^m 和 U_λ^m 在随机向量 $\tilde{\alpha}$ 的均值处展开，略去二阶以上项

$$e_\lambda^m=\{\underline{e},\bar{e}\}_\lambda^m=\{e_0^- - \sum_{i=1}^{n}e_i^-\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_{ij}^-\alpha_i\alpha_j,$$

$$e_0^+ + \sum_{i=1}^{n}e_i^+\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_{ij}^+\alpha_i\alpha_j\}_\lambda^m$$

$$B_\lambda^m=[\underline{B},\overline{B}]_\lambda^m=[B_0^- + \sum_{i=1}^{n}B_i^-\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}^-\alpha_i\alpha_j,$$

$$B_0^+ + \sum_{i=1}^{n} B_i^+ \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}^+ \alpha_i \alpha_j]_\lambda^m$$

$$u_\lambda^m = \{\underline{u}, \bar{u}\}_\lambda^m = [u_0^- + \sum_{i=1}^{n} u_i^- \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^- \alpha_i \alpha_j,$$

$$u_0^+ + \sum_{i=1}^{n} u_i^+ \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^+ \alpha_i \alpha_j\}_\lambda^m$$

将以上三式代入式(14)，然后作区间数的分解，并忽略以分配律代替区间数运算的亚分配律而引起的误差，便可求得

$$\{e_0^+\}_\lambda^m = \{B_0^+ u_0^+ + \frac{1}{4}[B_0^+ + B_0^-]\{u_0^+ + u_0^-\}\}_\lambda^m$$

$$\{e_0^-\}_\lambda^m = \{-B_0^+ u_0^+ + \frac{3}{4}[B_0^+ + B_0^-]\{u_0^+ + u_0^-\}\}_\lambda^m$$

$$\{e_i^+\}_\lambda^m = \{B_i^+ u_0^+ + B_0^+ u_i^+ + \frac{1}{4}[B_i^+ + B_i^-]\{u_0^+ + u_0^-\} + \frac{1}{4}[B_0^+ + B_0^-]\{u_i^+ + u_i^-\}\}_\lambda^m$$

$$\{e_i^-\}_\lambda^m = \{-B_i^+ u_0^+ - B_0^+ u_i^- + \frac{3}{4}[B_i^+ + B_i^-]\{u_0^+ + u_0^-\} + \frac{3}{4}[B_0^+ + B_0^-]\{u_i^+ + u_i^-\}\}_\lambda^m$$

$$\{e_{ij}^+\}_\lambda^m = \{B_i^+ u_j^+ + B_j^- u_i^- + B_0^+ u_{ij}^+ + B_{ij}^+ u_0^+ + \frac{1}{4}[B_0^+ - B_0^-]\{u_{ij}^+ + u_{ij}^-\} +$$

$$\frac{1}{4}[B_{ij}^+ + B_{ij}^-]\{u_i^+ - u_0^-\} + \frac{1}{4}[B_i^- + B_i^-]\{u_j^+ + u_j^-\} +$$

$$\frac{1}{4}[B_j^+ + B_j^-]\{u_i^+ - u_i^-\}\}_\lambda^m$$

$$\{e_{ij}^-\}_\lambda^m = 3\{e_{ij}^+\}_\lambda^m - 4\{B_i^+ u_j^+ + B_j^+ u_i^+ - B_0^+ u_{ij}^+ + B_{ij}^+ u_0^+\}_\lambda^m \tag{15}$$

于是第 m 单元应变均值的 λ 截集为

$$E_\lambda(e^m) = \{e_0^- + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}^- E(\alpha_i\alpha_j), e_0^+ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}^+ E(\alpha_i\alpha_j)\}_\lambda^m \tag{16}$$

第 k 和 l 单元的应变协方差矩阵 λ 截集为

$$\mathrm{Cov}(e^k, e^l)_\lambda = E[(\underline{e}_k - E(\bar{e}_k), \bar{e}_k - E(\underline{e}_k))((\underline{e}_l - E(\bar{e}_l))^T, (\bar{e}_l - E(\underline{e}_l))^T)]_\lambda$$

应变取一阶近似，并记

$$\left.\begin{aligned}
&Q(e) = \{e_{k0}^- - e_{k0}^+\}, \qquad R(e) = \{e_{k0}^+ - e_{k0}^-\}; \\
&S(e) = \{e_{l0}^- - e_{l0}^+\}_\lambda^T \qquad T(e) = \{e_{l0}^+ - e_{l0}^-\}_\lambda^T \\
&A(e) = Q(e)S(e) + [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ki}^- e_{lj}^{-T} E(\alpha_i\alpha_j)]_\lambda \\
&B(e) = Q(e)T(e) + [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ki}^- e_{lj}^{+T} E(\alpha_i\alpha_j)]_\lambda \\
&C(e) = R(e)S(e) + [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ki}^+ e_{lj}^{-T} E(\alpha_i\alpha_j)]_\lambda
\end{aligned}\right\}$$

$$D(e) = R(e)T(e) + \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} e_{i,\lambda}^{+} e_{j,\lambda}^{+T} E(\alpha_i\alpha_j)\right]; \tag{17}$$

则 $\mathrm{Cov}(e^k, e^l)$ 的第 m 行 n 列元素为

$$\mathrm{Cov}(e^k, e^l)_\lambda^{mn} = [\min\{A(e)_{mn}, B(e)_{mn}, C(e)_{mn}, D(e)_{mn}\}, \max\{A(e)_{mn}, B(e)_{mn}, C(e)_{mn}, D(e)_{mn}\}] \tag{18}$$

对任一单元 m，应力 σ^m 的 λ 水平截集为

$$\sigma_\lambda^m = D_\lambda^m e_\lambda^m \tag{19}$$

将 σ_λ^m、D_λ^m、e_λ^m 在随机向量 $\underset{\sim}{\alpha}$ 的均值处展开，代入式(19)便可求得 σ_λ^m 展开式中的全部系数，其结果相当于在式(15)中将 e 换成 σ、B 换成 D、u 换成 e 即可。于是可求得

$$E_\lambda(\sigma^m) = \left\{\sigma_0^- + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sigma_{ij}^- E(\alpha_i\alpha_j), \sigma_0^+ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sigma_{ij}^+ E(\alpha_i\alpha_j)\right\}_\lambda^m \tag{20}$$

为求第 k 和 l 单元应力协方差矩阵，只需在式(17)各记号中将 e 换为 σ，从而

$$\mathrm{Cov}(\sigma^k, \sigma^l)_\lambda^{mn} = [\min\{A(\sigma)_{mn}, B(\sigma)_{mn}, C(\sigma)_{mn}, D(\sigma)_{mn}\}, \max\{A(\sigma)_{mn}, B(\sigma)_{mn}, C(\sigma)_{mn}, D(\sigma)_{mn}\}] \tag{21}$$

由式(12)、(13)、(16)、(18)、(20)和(21)给出的都是有关量的 λ 截集。根据模糊分解定理，取一系列 $\lambda(0 < \lambda \leqslant 1)$ 值计算，便可得到位移、应变及应力的均值和协方差，它们都是有界闭模糊数。

3 结　语

1) 笔者提出了结构材料特性、几何特性及载荷特性中的某些参数取值具有模糊性而其概率为普通值时，求解结构分析有限元平衡方程的解法；推导了求节点位移的递归方程组；给出了求位移、应变和应力数字特征的计算公式。由这些公式可见，当有关参数不具有随机性，即随机向量 $\underset{\sim}{\alpha}$ 为零向量时，笔者所给出的位移、应变和应力计算公式与一般模糊有限元公式相吻合；若设防水平 λ 仅取值 1、并且原始模糊随机参数为非平模糊随机数时，笔者所给出的公式与一般随机有限元摄动解法公式相吻合。

2) 笔者所给算法易于程序化，算法的主要计算量在于求解递归方程组(11)。当 λ 共取 n 次值时，本文算法的计算量相当于一般随机有限元摄动解法的 $2n$ 倍，因此在实际计算中应合理调整设防水平 λ，以尽量减少计算工作量。

参　考　文　献

1　陈虬，刘先斌．随机有限元法及其工程应用．成都：西南交通大学出版社，1993. 78～87

2　张跃．模糊随机变量．哈尔滨建筑工程学院学报，1989，22(3)：12～21

3　张跃．模糊随机向量．哈尔滨建筑工程学院学报，1989，22(4)：27～41

4　禹智涛，吕恩琳，王彩华．结构模糊有限元平衡方程的一种解法．重庆大学学报，1996，19(1)：53～58

5　D. 杜布瓦，H·普哈德著．模糊集与模糊系统——理论和应用．江苏省模糊数学专业委员会译．南京：江苏科学技术出版社，1987. 75