TP?\P2466X\01??

1996 年 11 月　重庆大学学报（自然科学版）　Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　Nov. 1996

① 96, 19 (6) 1—8

解约束优化问题的一类广义共轭方向法——一种几何处理*

1-14

The Generalized Conjugate Direction Method for Constrained Optimization ——A Geometrical Approech

O224

杨万年　张仁忠**
Yang Wannian　Zhang Renzhong
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；第一作者 59 岁，男，教授）

摘　要　运用微分几何方法将无约束最优化中的共轭方向法推广到约束最优化问题上。在约束子流形上诱导了一类新的仿射联络使原来的约束最优化问题转化为约束流形上的无约束的局部二次规划问题。在此基础上定义并构造了一类广义共轭方向，并证明了原约束优化问题的极值点必位于上述共轭方向所形成的测地线上且可在有限步内达到它。从而形成了具有广义共轭方向的一种曲线搜索算法。

关键词　最优化算法；共轭梯度法 / 共轭方向

中国图书资料分类法分类号　O221.2

ABSTRACT　The conjugate direction method for solving the unconstrained optimization problem is extended to solving the constrained optimization problem by method of differential geomtry. By inducing a new class of affine connections on a constrained sub-manifold, the primary constrained optimization problem is converted to a unconstrained local quadratic programming problem. Based on the definition and construction of a new class of generalized conjugate directions, it is proved that optimum value of the primary constrained optimization problem must be located on the geodesic line which is formed by the conjugate directions mentioned above and can be reached within finite searching step. Therefore a new curve search algorithm with generalized conjugate directions is put forward.

KEYWORDS　optimization algorithms; conjugate gradient method / conjugate direction

0　引　言

考虑极小化正定二次函数问题：

*　收文日期　1996-03-20

** 现在吉林省通化师范学院工作

$$\min Q(\alpha)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c \qquad x\in R^n \tag{1}$$

其中 $A\in R^{n\times n}$ 对称正定，$b\in R^n$，$c\in R^1$. 向量组 $p_1,\cdots,p_n$ 满足关系：

$$p_i^TAp_j=0 \qquad i\neq j \tag{2}$$

则称此向量组关于矩阵 A 共轭。从任意初始点 $x^{(0)}$ 出发，依次沿 n 个共轭方向 $p_1,\cdots,p_n$ 并经过精确线性搜索，则至多 n 次即可到达 $Q(x)$ 的极小点。此方法简明、收敛快，是解无约束二次规划中极为重要的方法。虽然对非二次规划的无约束优化问题没有给出共轭方向的概念，但是对二次函数生成共轭方向的算法在用于非二次函数极小化问题时却获得了极大的成功，形成了无约束优化问题中的一大类方法 —— 共轭方向型算法。

共轭方向的概念来源于线性代数方程组的求解。它的首次出现是在 Fox 等人的文章中[1]，以后相继出现的如 Hestenes 等创立共轭梯度法[2]，Davidon 提出的变尺度法[3]，Fletcher 和 Powell 等人的著名的 DFP 的方法[4]，Huang 关于变尺度法的统一处理[5]等工作都对共轭方向的应用起到了推波助澜的作用，形成了可统一称之为梯度型算法的一大类方法。它们在无约束优化问题中具有重要的地位。这类方法一旦用于求解二次规划时也自动地生成了共轭方向。

共轭方向法由于其方法简单、收敛快而受到人们的重视，近年来已被推广到并行计算之中而创立了伪共轭方向[6]及块共轭方向[7]等概念。

Mcdowell 在[8]中提出了一类广义共轭方向的概念以求解无约束函数极小化问题。他的作法与一般作者所采用的思路不同。通常情况下人们的算法设计都是在不改变函数定义空间的欧氏平直几何结构前提下进行的，所进行的求导、平行移动等概念也都是在欧氏空间的通常意义下进行的，容易为大多数人所接受。Mcdowell 在[9]中利用目标函数作工具在其定义空间引入了一种新的平坦的无挠率的仿射联络，在此联络下目标函数将具有局部二次函数的特征，从而沿着广义的负梯度方向可以在有限步内达到函数的极小点。不过此时函数的 Taylor 展开及负梯度方向等均是在协变微分运算下完成的。在[9]中 Mcdowell 进一步利用了函数在新联络下的局部二次函数特性而定义了广义共轭方向的概念，将二次函数极小化的共轭方向法推广到一般无约束函数优化问题上。

对于约束优化问题通常有两种处理方式。其一是将约束条件用某种方式纳入到目标函数之中变成无约束优化问题，如拉格朗日乘子法，罚函数法等均属于此类。其二是利用约束流形上的某种切向量场，在给定的初始条件下沿着向量场的积分曲线进行搜索以收敛到函数的极小点。投影梯度法是其中较著名的一种。C. A. Botsaris[10,11]则在更一般的情形下选取了约束流形上的一类特殊的切向量场并给出了曲线搜索路径。在[11]中他所给的切向量场具有测地向量场的特征，其搜索路径是约束流形上的一条测地线。但这一测地线是在约束流形作为 R^n 之正则子流形情况下给出的。虽然直观上易于理解但其计算复杂且不具有二次函数那样在有限步内收敛的特征。

笔者在[12]中利用 Mcdowell 的思想及微分子流形的诱导联络技术（参[15]），在约束流形上目标函数的极小点 h 附近建立了一类特殊的仿射联络，它使原来的约束优化问题变为流形上的无约束优化问题且具有局部二次函数的特征。本文中笔者进一步利用上述两个特点提出了一类广义的共轭方向，从而将共轭方向的思想推广到了约束优化问题上。

值得一提的是，讨论流形上的最优化问题是一个历史较久的问题。通常也叫大范围最优

化或大范围变分的问题。最早的大范围变分问题之一是关于黎曼流形上测地线的存在问题[13]。另一类问题则是由流形上微分方程组所定义的最优控制问题。从数学意义上讲，这是一种约束变分问题。对这一问题 Hestenes,M. R1950 年已证明了它的极大值原理，1958 年 Pontryagin 再次独立地给出了该原理并以 Pontryagin 的名字命名，根据极大值原理可将此最优控制问题转化一个数学规划问题[14]，这应当说是研究流形上数学规划问题的起点。

1　预备知识

设 $x^1,\cdots,x^n$ 为流形 M 上的局部坐标，Γ 为流形上的一种联络，$\{\Gamma^l_{uk}\mid u,k,l=1,\cdots,n\}$ 代表 Γ 的分量，设 p 表示 M 上的一个切向量场，对于局部坐标 (x^i) 它有分量 p^i，则 p 关于联络 Γ 的协变导数具有分量：

$$p^i_{,k} = \frac{\partial p^i}{\partial x^k} + \sum_s \Gamma^i_{ks} p^s \tag{3}$$

设 g 表示 1- 形式场，其分量记为 g_u，则 g 关于联络 Γ 的协变导数的分量为：

$$g_{u,k} = \frac{\partial g_u}{\partial x^k} - \sum_s \Gamma^s_{ku} p^s \tag{4}$$

设 f 是从流形 $M \to R^1$ 的可微函数，在 M 的局部坐标内，函数 f 关于联络 Γ 的一阶和二阶协变导数分别为：

$$f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \tag{5}$$

$$f_{,ku} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^u} - \sum_s \Gamma^s_{ku} \frac{\partial f}{\partial x^s} \tag{6}$$

设 $x(t)$ 代表 M 上一条可微曲线，p 为定义在 $x(t)$ 上的向量场，则 p 沿着 $x(t)$ 的协变导数定义为：

$$\frac{\mathrm{D}p^k}{\mathrm{d}t} = \sum_u p^k_{,u} \frac{\mathrm{d}x^u}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

结合(3)，(7) 可得：

$$\frac{\mathrm{D}p^k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p^k}{\mathrm{d}t} + \sum_{s,u} \Gamma^k_{su} \frac{\mathrm{d}x^u}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

如果 $\frac{\mathrm{D}p^k}{\mathrm{d}t} = 0$ 则称 p 沿着 $x(t)$ 平行移动。如果 $x(t)$ 的切矢量 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 沿 $x(t)$ 平行移动则称 $x(t)$ 为 M 上的测地线，从(8) 可知测地线方程为如下二阶微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{s,u} \Gamma^k_{su} \left(\frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^u}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{9}$$

还可以定义任意张量场的协变微分及沿曲线 $x(t)$ 平移的概念，详细的请参看[15]。

2 约束优化问题广义共轭方向的导出

本文的工作是建筑在如下定理基础之上的。

定理 1[8] 设 $f \in C^4(R^n R)$ 并具有正定的 Hesse 矩阵且有唯一的极小点 h，则在 R^n 上存在一种平坦联络 Γ 使得在 h 的一个邻域 N 中

$$\begin{cases} f;ks \text{ 对称正定} & (10) \\ f;kms = 0 & (11) \end{cases}$$

今考虑如下约束最优化问题：

$$\begin{cases} \min f(x) \quad x \in R^n \\ \text{s.t. } g(x) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

其中 $f \in C^4(R^n, R^1)$，$g \in C^4(R^n, R^m)$，$m < n$，又在可行域 $v_s = \{x \in R^n | g(x) = 0\}$ 上恒有 $\text{rank} Jg(x) = m$，从而 v_s 构成 R^n 中的一个 $n - m$ 维子流形，我们称它为约束子流形。设 f 有对称正定的 Hesse 矩阵且在 v_s 上有唯一极小点 h. f_s 为 f 在 v_s 上的限制。设 $(x^\lambda | \lambda = 1, \cdots, n)$ 和 $(u^a | a = 1, \cdots, n - m)$ 分别代表 R^n 中的坐标与 v_s 中的局部坐标，v_s 的方程表示为 $x^\lambda = x^\lambda(u^a)$. 以下约定用希腊字母代表 R^n 中点坐标的分量指标，用拉丁字母表示 v_s 中点坐标分量的指标，并规定如无特别说明当上下指标相同时则表示求和。

定理 2[12] 设为 h 为 f 在 v_s 上的极小点，$\{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} | \lambda, \mu, \nu = 1, \cdots, n\}$ 代表定理 1 中所界定的 R^n 的仿射联络，则在 v_s 上点 h 的一个邻域内可以诱导一个仿射联络 $\{\Gamma^a_{bc} | a, b, c = 1, \cdots, n - m\}$ 满足如下条件：

1) 该联络是平坦的无挠率的联络；

2) $(f_s);ab$ 构成一个对称正定矩阵；

3) $(f_s);abc = 0$ (13)

由上述第三条和第二条可以看出在 h 的一个小邻域内，在协变微分的意义下 f_s 具有局部二次函数的特征[12] 且具有对称正定的 Hesse 矩阵 $[(f_s);ab]$. 原约束优化问题(12) 即转化为一个局部的无约束二次函数的极小化问题。因此对它引入广义共轭方向是可能的。

最初作者拟利用 R^n 上的联络引入广义共轭方向再诱导到 v_s 中去。但随即发现这样作虽然是可能办到的，但其过程相当复杂而且不易满足广义共轭方向所要求的全部条件。后改为用 $(f_s);ab$ 本身并利用 schmidt 正交化方法定义了广义共轭方向。

任取 v_s 上的一组线性独立的切向量场 $l_1, \cdots, l_{n-m}$，它们满足：

$$(l_i^a)_{,b} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n - m, \quad a, b = 1, \cdots, n - m \tag{14}$$

由于 v_s 是 $n - m$ 维流形，故每个 l_i 均为 $n - m$ 维向量。

令

$$\begin{aligned} p(1) &= l_1 \\ p(i+1) &= l_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{p^T(k)[(f_s);ab]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_s);ab]p(k)} p(k) \\ & \qquad i = 1, \cdots, n - m - 1 \end{aligned} \tag{15}$$

定理 3　由条件(14)(15)所定义的向量场 $p(1),\cdots,p(n-m)$ 满足如下条件：

$$p^a(i)_{,b}=0 \tag{16}$$

$$(f_v)_{,ab}p^a(i)p^b(j)=0 \qquad i\neq j \tag{17}$$

$$(f_v)_{,ab}p^a(i)p^b(j)>0 \qquad i=j \tag{18}$$

证　先证(16)

$$p^a(1)_{,b}=(l_1^a)_{,b}=0$$

$$p^a(i+1)_{,b}=(l_{i+1}^a)_{,b}-\sum_{k=1}^{i}\left[\left(\frac{p^T(k)[(f_v);ac]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_v);ac]p(k)}\right)_{,b}p^a(k)+\frac{p^T(k)[(f_v);ac]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_v);ac]p(k)}p^a(k)_{,b}\right]$$

其中后二项中的第一项为标量函数之微分，故为普通导数。由(13)(14)得：

$$\left(\frac{p^T(k)[(f_v);ac]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_v);ac]p(k)}\right)_{,b}$$

$$=\left(\frac{(f_v);ac]p^a(k)l_{i+1}}{[(f_v);ac]p^a(k)p^c(k)}\right)_{,b}$$

$$=\frac{(f_v);abc]p^a(k)l_{i+1}^c+(f_v);ac]p^a(k)_{,b}l_{i+1}^c+(f_v);ac]p^a(k)(l_{i+1}^c)_{,b}}{(f_v);ac]p^a(k)p^c(k)}$$

$$-\frac{(f_v);ac]p^a(k)l_{i+1}^c[(f_v);abc]p^a(k)p^c(k)+(f_v);ac]p^a(k)_{,b}p^c(k)+(f_v);ac p^a(k)p^c(k)_{,b}]}{[(f_v);ac]p^a(k)p^c(k)]^2}$$

$$=0$$

从而由归纳假设可得 $p^a(i+1)_{,b}=0$

再证(17)，先设 $i=2,j=1$

$$(f_v);ab p^a(2)p^b(1)=p^T(1)[(f_v);ab]p(2)$$

$$=p^T(1)[(f_v);ab]\left[l_2-\frac{p^T(1)[(f_v);ab]l_2}{p^T(1)(f_v);ab]p(1)}p(1)\right]$$

$$=p^T(1)[(f_v);ab]l_2-\frac{p^T(1)(f_v);ab l_2}{p^T(1)[(f_v);ab]p(1)}p^T(1)[(f_v;ab]p(1)$$

$$=0$$

设 $j<i$ 时有 $(f_v)_{;ab}p^a(i)p_b(j)=0$，当 $j<i+1$ 时有

$$(f_v)_{;ab}p^a(i+1)p_b(j)=p^T(j)[(f_v);ac]p(i+1)$$

$$=p^T(j)[(f_v);ab]l_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}\frac{p^T(k)[(f_v);ab]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_v);ab]p(k)}p^T(k)[(f_v);ab]p(k)$$

$$=p^T(j)[(f_v);ab]l_{i+1}\frac{p^T(j)[(f_v);ab]l_{i+1}}{p^T(j)[(f_v);ab]p(j)}p^T(j)[(f_v);ab]p(j)$$

$$=0$$

(18)是显然成立的。(17)，(18)表明向量场 $p(1),\cdots,p(n-m)$ 对推广了的 Hesse 矩阵$[(f_v);ab]$ 共轭，故称为广义共轭方向。

定理 4　由(14)(15)所定义的共轭向量组 $p(1),\cdots,p(n-m)$ 线性独立。

定理 5　设 $u_0\in v_r,u_0\neq h,g_b$ 为 v_r 中满足如下关系：

$$g_{b;c}=0 \tag{19}$$

$$(f_v)_{,b}|u_0=g_b(u_0) \tag{20}$$

的 1- 形式场，又 $u^a=u^a(t)$ 是 v_r 中的在联络$\{\Gamma^a_{cb}\}$之下的一条测地线，它过点 u_0 且在 u_0 处切于向量 r_0^b 则函数 f_v 关于 u^a 的偏微分在该测地线上将满足如下关系：

$$\frac{\partial f}{\partial u^a}=g_a+t(f_v)_{;ab}r^b(t) \tag{21}$$

其中 $r^a(t)$ 是向量 r_0^a 沿该测地线的平移。

证 令

$$b_a(t)=\frac{\partial f_v}{\partial u^a}-g_a-t\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;ab}r^b(t)$$

对 $b_a(t)$ 沿测地线微分：

$$\begin{aligned}
Db_a(t)/dt &= b_{a;c}\frac{du_c}{dt}\\
&=(f_v)_{;ac}\frac{du^c}{dt}-g_{a;c}\frac{du^c}{dt}-\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;ab}r^b(t)\\
&\quad -t\left\{\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;abc}\frac{du^c}{dt}r^b(t)+\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;ab}r^b_{;c}\frac{du^c}{dt}\right\}\\
&=\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;ab}\frac{du^b}{dt}-\sum_{b=1}^{n-m}(f_v)_{;ab}r^b(t)\\
&=0
\end{aligned}$$

故 $b_a(t)$ 是沿测地线的常向量。由 $b_a(0)=(f_v)_{;a}|_{u_0}-g_a(u_0)=0$，即得定理 3 结论。

由 $(f_v)_{;ab}$ 是二阶协变常张量场及条件(16)和(19)，这蕴含着对每个 $i,g_ap^a(i)$ 和 $(f_v)_{;ab}p^a(i)p^b(i)$ 都是常标量场，因此可以定义 $n-m$ 个常数 $\lambda^{(i)}$

$$\lambda^{(i)}=-g_ap^a(i)/(f_v)_{;ab}p^a(i)p^b(i) \tag{22}$$

$$i=1,\cdots,n-m$$

定理 6 利用 $\lambda^{(i)}$ 构造反变向量场

$$r^a=\sum_{i=1}^{n-m}\lambda^{(i)}p^a(i) \tag{23}$$

则从 v_f 中任一点 u_0 出发以 r^a 为切向量的曲线 $u^a(t)$ 必为 v_f 上之测地线。

事实上，由于 r^a 为曲线 $u^a(t)$ 之切向量，对 r^a 沿 $u^a(t)$ 微分：

$$\frac{Dr^a(t)}{dt}=r^a_{;b}\frac{du^b}{dt}=\sum_{i=1}^{n-m}\lambda^{(i)}p^a(i)_{;b}\frac{du^b}{dt}=0$$

即 $r^a(t)$ 沿 $u^a(t)$ 平行移动，$u^a(t)$ 为测地线。

定理 7 设 f_v 在 v 上之极小点为 h，又 $u(t)$ 为过初始 $u_0(u_0\neq h)$ 且切于向量场 $r^a=\sum_{i=1}^{n-m}\lambda^{(i)}p^a(i)$ 的测地线：

$$\begin{cases}\dfrac{du^a}{dt}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-m}\lambda^{(i)}p^a(i)\\ u^a(0)=u_0^a\\ u^a(0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-m}\lambda^{(i)}p^a(i)|u_0\end{cases} \tag{24}$$

则 h 必在该测地线上且 $h=u(1)$。

证 因为 $u^a(t)$ 是测地线(定理 6) 又由(21)

$$\sum_{a=1}^{n-m}\frac{\partial f_v}{\partial u^a}p^a(k)$$

$$= \sum_{a} g_a p^a(k) + t\sum_{a,b}(f_*)_{;ab} r^b(t) p^a(k)$$

$$= \sum_{a} g_a p^a(k) + t\sum_{a,b}(f_*)_{;ab}\sum_{i}\lambda^{(i)} p^b(i) p^a(k)$$

$$= \sum_{a} g_a p^a(k) + t\lambda^{(k)}\sum_{a,b} p^a(k) p^b(k) \quad (\text{由共轭性})$$

令 $t = 1$，并将 $\lambda^{(k)}$ 的表达式代入上式最末一项即得

$$\sum_{a=1}^{n-m}\frac{\partial f_*}{\partial u^a}p^a(k) = 0 \qquad k = 1,\cdots,n-m \tag{25}$$

记 $F_* = \left(\frac{\partial f}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u^{n-m}}\right)$，$P = (p(1),\cdots,p(n-m))$，(25) 式表明

$$F_* P = 0$$

由 $p(1),\cdots,p(n-m)$ 线性独立，P 为满秩矩阵，故 $\mathrm{rank}F_* = 0$，所以有

$$\frac{\partial f}{\partial u^a} = 0 \qquad a = 1,\cdots,n-m$$

由 h 之唯一性有 $h = u(1)$.

3　算法概要

1) 对函数的 Hesse 矩阵 $H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right]$作分解 $H = C^2$，求出 $C = (C_{ij})$.

2) 求向量

$$A_r = C_{ir}(x^i - h^i), \qquad r = 1,\cdots,n$$

3) 解方程组

$$A_{r,\lambda\mu} - \Gamma^{m}_{\lambda\mu}A_{r,m} = 0$$

求得 $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$，　$\lambda,\mu,\nu = 1,\cdots,n$.

4) 计算 $f_{,\lambda}$　$f_{;\lambda\mu}$

5) 由约束条件 g 计算

$$\nabla g = (\underset{m}{\nabla_1 g}, \underset{n-m}{\nabla_2 g})$$

求出

$$B = \begin{pmatrix} (\nabla_1 g)^{-1}\nabla_2 g \\ I_{n-m}\end{pmatrix} = (B_1,\cdots,B_a,\cdots,B_{n-m})$$

6) 计算

$$(f_*)_{;a} = B_a^\lambda f_{,\lambda}$$

$$(f_*)_{;ab} = B_a^\lambda B_b^\mu f_{;\lambda\mu}$$

7) 取一组线性独立向量场 $l_1,\cdots,l_{n-m} \in R^{n-m}$ 满足

$$(l_i^a)_{,b} = 0 \qquad i = 1,\cdots,n-m,a,\quad b = 1,\cdots,n-m$$

令

$$p(1) = l_1$$

$$p(i+1) = l_{i+1} - \sum_{k=1}^{i}\frac{p^T(k)[(f_*)_{;ab}]l_{i+1}}{p^T(k)[(f_*)_{;ab}]p(k)}p(k) \qquad (i = 1,\cdots,n-m-1)$$

8）计算

$$\lambda^{(i)} = - g_a p^a(i) \,/\, (f_v)_{ab} p^a(i) p^b(i) \qquad (i = 1, \cdots, n - m)$$

9）解方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n-m} \lambda^{(i)} p^a(i) \\ u^a(0) = u_0 \\ \dot{u}^a(0) = \sum\limits_{i} \lambda^{(i)} p^a(i) \big|_{u_0} \end{cases}$$

得 $u(t)$，则 $h = u(1)$.

参 考 文 献

1 Fox L, Huskey H, Wilkinson J H. Notes on the solution of algebraic linear simultaneaus equations. Quartely Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1948, (1): 149～173

2 Hestenes M R, Stiefel I. The method of conjugate gradient for solving linear system. Journal on Research of The National Rureau of Standards. 1952, 49: 409～430

3 Daviden W C. Variable metric method for minimization. Atomic Energy Commission, Algonne National Laboratory, Illinois. R & D Report, 1959, ANL-5990

4 Fletcher R, Powell M J D. A rapidly convergent method for minimization. Computer Jorunal. 1965, (6): 163～168

5 Huang H Y. Unified approach to guadratically convergent algorithms for function minimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 1970, 5(6): 81～193

6 Housos E C, Wing O. Pseudo-conjugate directions for the nonlinear unconstrained optimization problem on a parallel computer. Journal of Optimization Theory and Applications. 1984, 42(2): 169～180

7 Nottrot R. Optimal processes on manifolds. Springer-Verlay. 1982

8 Mcdowell D G. Generalized conjugate directions for unconstrained function minimizaion. Journal of Optimization Theory and Application. 1983, 141(4): 523～531

9 Mcdowell D G. A characterization of the minimization of a function. Journal of Optimization Theory and Applications. 1978, 25(1): 1～9

10 Botsaris C A. A class of differential descent methods for constrained optimization. Journal of Mathematics Analysys and Applications. 1981, 79: 96～112

11 Botsaris C A. Constrained optimization along geodesics. Journal of Mathematics Analysis and Applications. 1981, 79: 295～306

12 杨万年．带等式约束非线性规划的一个几何特征．运筹学杂志．1991, 10(1): 59～61

13 Kahn D W. Introduction to global aralysis. Academic Press. 1980

14 立花俊一．黎曼几何．朝仓书店(近代数学讲座)，1967，1974

15 杨万年．流形上的 Taylor 定理及其应用．重庆大学学报(应用数学专辑)．1987, 10(7): 18～28

16 杨万年，张世清．约束非线性规划近似极值点的存在性，重庆大学学报，1988, 11(3): 94～99