1996 年 11 月 第 19 卷第 6 期
重庆大学学报 (自然科学版)
Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)
Vol. 19, №. 6 Nov. 1996

⑥ 33-38

一类具有最佳连通性的超图*

A Class of Hypergraphs with the Best Connectivity

O157.5
TP303

何中市[①] He Zhongshi　　陈廷槐[②] Chen Tinghuai　　杨晓帆[②] Yang Xiaofan

(①重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；②计算机研究所；第一作者 31 岁，男，副教授、博士生)

摘　要　在产生一组跳变序列的基础上，构造了一类具有 n 个顶点、n 条边的 r-均匀超图。再通过分析其二截(图)的连通度，证明了此超图具有最佳连通性。这类超图可直接应用于设计最佳容错的多总线计算机系统。

关键词　超图；图连通性；总线式结构

计算机

中国图书资料分类法分类号　O157.5；TP303

ABSTRACT　A jumping sequence is proposed, so that a class of r-uniform hypergraphs with n vertices and n edges is constructed. Then by analysing the connectivity of its two-section (graph), this class of hypergraphs is proved to have the best connectivity. The class of hypergraphs can be used to design the optimal fault-tolerant multibus computer systems.

KEYWORDS　hypergraph; connectivity of graph; bus-structure

0　引　言

连通性指标是网络可靠性、容错性的重要指标。图和超图的最佳连通性分析与设计在计算机网络、电力网络、交通网络和神经网络中都起着十分重要的作用[1~3]。

关于图的最佳连通性分析与设计问题，已有不少研究成果[4~6]，其中经典之作属哈拉里提出的一类图(被称为哈拉里图 H.)它具有最佳连通性。在超图方面，陈廷槐等建立了超图的最佳连通性、区组设计与容错多总线系统的对应关系[1,2]，从而使超图的最佳连通性、区组设计等方面的结果可直接用于计算机网络中去。然而超图的最佳连通性问题至今远未解决。

笔者对任意的整数 $r\geqslant 2$，就顶点数与边数相等的情形，构造了一类秩为 r 的一致超图，并严格证明了其具有最佳连通性。此类超图可直接应用于设计具有任意端口数的计算机容错多总线系统。

1　符号及术语

超图 H 是一个二元组(V,E)，V 是有限非空集，其中的元素被称为 H 的顶点；E 是 V 的一

* 收文日期　1996-03-15
国家自然科学基金资助项目

些非空子集族（边族），其中的子集称为 H 的边[7]。

设 $e\in E$，则 $|e|$ 表示边 e 所包含的顶点个数。称 $r(H)=\max\limits_{e\in E}|e|$ 为超图 H 的秩，若对所有的边 $e\in E$ 都有 $|e|=r(H)$ 成立，则称 H 为一致超图。

对超图 H 引用如下记号。$V(H)$：H 的顶点集，$E(H)$：H 的边族；$d_H(v)$：顶点 v 在 H 中的度，并称

$$\delta(H)=\min_{v\in V(H)}d_H(v),\ \Delta(H)=\max_{v\in V(H)}d_H(v)$$

分别为 H 的顶点最小度和最大度。若 $\delta(H)=\Delta(H)$，则称 H 为正则图。

超图 H 的（点）连通度 $\kappa(H)$ 定义为 H 的点数最少的顶点割集中所含的顶点数目；类似地有 H 的边连通度 $\lambda(H)$. 文献[1]证明了超图的连通性不等式如下

$$\kappa(H)\leqslant(r-1)\lambda(H)\leqslant(r-1)\delta(H)\leqslant(r-1)[r|E(H)|/|V(H)|] \tag{1}$$

其中 $r=r(H)$ 为超图的秩。并称(1)式中全部等号成立的超图具有最佳连通性，即具有最大的连通度和边连通度。

把图看作是一类特殊的超图（秩为 2 的一致超图），亦有以上记号。

超图 $H=(V,E)$ 的二截 $H_2=(V,E_2)$ 是简单图，其中 $E_2=\{\{v_1,v_2\}$：存在某条边 $e\in E$，使 $v_1,v_2\in e\}$. 易于验证

$$d_{H_2}(v)\leqslant\sum_{e,v\in e}(|e|-1),\quad \Delta(H_2)\leqslant(r-1)\Delta(H)$$

并有

$$\kappa(H)=\kappa(H_2) \tag{2}$$

2 构 图

哈拉里给出的哈拉里图 H_n 具有最佳连通性，它实质上是一类具有最佳连通性的秩为 2 的一致超图，相应于对 $r=2$，给出了使(1)式中全部等号成立的超图。就任意的整数 $r\geqslant 2$，笔者构造了一类使(1)式中全部等号成立的超图。

下面就对任意的整数 $r\geqslant 2$，n，构造一类超图 $H=(V,E)$ 如下：

$$V(H)=\{0,1,\cdots,n-1\},E(H)=\{e_0,e_1,\cdots,e_{n-1}\}$$

其中：

$$e_i=\{i+d_j(\bmod n),j=1,2,\cdots,r\},i=0,1,\cdots,n-1$$

$$d_1=0,d_2=1,d_j=(-1)^j2^{j-2}+\frac{1}{2}(1+(-1)^j),j\geqslant 3 \tag{3}$$

由此可以得出当 n 相对 r 较大，即下式成立

$$n>\begin{cases}2, & r=2,\\ 6, & r=3,\\ 2^{r-1}+2^{r-2}+2, & r\geqslant 4.\end{cases} \tag{4}$$

则 H 的二截 H_2 是一个循环图 $C_n\langle a_1,a_2,\cdots,a_t\rangle$. 其中

$$k = \binom{r}{2} = \frac{1}{2}r(r-1), \qquad a_k = |d_r - d_{r-1}|$$

跳跃序列 $a_1,\cdots,a_k$ 如下：$|d_i - d_j|$，$i = 2,3,\cdots,r$，$j = 1,2,\cdots,i-1$；结合 d_j 的符号将此式的绝对值符号去掉，并按从小到大的顺序排列，则跳跃序列可划分为 $r-1$ 组 $B_2,B_3,\cdots,B_r$. 其中 B_l 含有 $l-1$ 个因子，具体如下：

$$B_2: d_2 - d_1; \qquad B_3 = d_1 - d_3, d_2 - d_3$$

若 l 为偶数，则 $B_l: d_l - d_{l-2}, d_l - d_{l-4}, \cdots, d_l - d_2, d_l - d_1, d_l - d_3, \cdots, d_l - d_{l-1}$；

若 l 为奇数，则 $B_l: d_{l-2} - d_l, d_{l-4} - d_l, \cdots, d_1 - d_l, d_2 - d_l, d_4 - d_l, \cdots, d_{l-1} - d_l$.

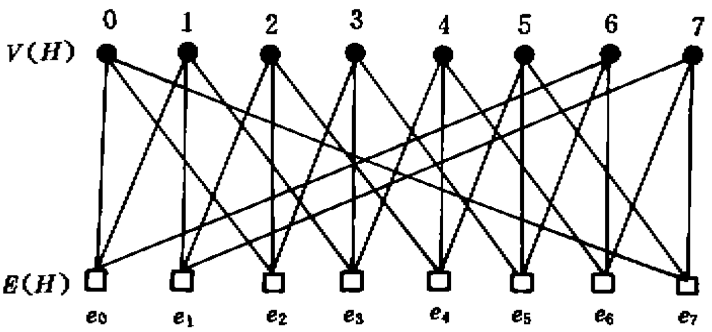
可知，每组 B_l 内部因子是从小到大按严格单调增顺序排列的；至于每组间，按 $B_2,\cdots,B_r$ 也是严格单调增的，可以如下验证：B_l 的最末一个因子小于 B_{l+1} 的第一个因子，即 $|d_l - d_{l-1}| < |d_{l+1} - d_{l-1}|$，$l = 2,\cdots,r-1$ 成立。

于是，当(4)式成立时，H 为一致超图，且

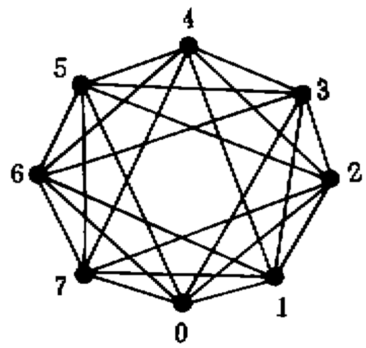
$$r(H) = r, \delta(H) = \Delta(H) = r$$

H_2 为具有 $k = \frac{1}{2}r(r-1)$ 个跳跃因子的循环图 $C_n\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$，且 $a_k < n/2$，从而 $\delta(H_2) = \Delta(H_2) = r(r-1)$.

附图给出了一个图例，其中 $r = 3, n = 8$.



(a) 超图 $H = (V,E)$



(b) H 的二截 $H_2 = C_n\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$

附图　超图及其二截

3　最佳连通性证明

下面将证明前面构造的超图在顶点数 n 相对秩 r 较大时，即(4)式成立时，具有最佳连通性(即具有最大的连通度和边连通度)，即(1)式中全部等号成立。而 H 使(1)式中全部等号成立，当且仅当 $\kappa(H) = (r-1)[rn/n] = r(r-1)$ 成立。再由(2)式可知，即 H 的二截 H_2 应满足 $\kappa(H_2) = r(r-1)$.

由于 H_2 为循环图，关于循环图的连通度，已有如下结论

引理 1[4]　设 $G = C_n\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$ 为循环图。若 $a_1 = 1$，且跳跃序列是凸序列，即 $a_{i+1} - a_i \geqslant a_i - a_{i-1}$ 对所有 $1 < i < k$ 成立。则

$$\kappa(G) = \delta(G)$$

引理 2[6] 设 $G = C_n\langle a_1, \cdots, a_k\rangle$ 为循环图。则

$$\kappa(G) = \delta(G) \Leftrightarrow \text{对所有正整数 } m;m|n, \text{有 } N_m \geqslant \min\{m-1, \delta(G)m/n\}.$$

其中 $N_m = |\{a_1, \cdots, a_k, n-a_k, \cdots, n-a_1, (\bmod m)\}|$ 表示 $2k$ 个正整数 $a_1, \cdots, a_k, n-a_k, \cdots, n-a_1$ 模 m 的不同非负余数的个数。

下面来证明若(4) 式成立，则 $\kappa(H_2) = r(r-1)$.

定理 1 当 $r \geqslant 2$，n 满足(4) 式时，$\kappa(H_2) = r(r-1)$.

证 因为当(4) 式成立时 $\delta(H_2) = r(r-1)$，故需证 $\kappa(H_2) = \delta(H_2)$ 成立。

若 $r = 2$，则 $H_2 = C_n\langle 1\rangle$ 即为圈，$\kappa(H_2) = \delta(H_2)$ 成立。

若 $r = 3$，则 $H_2 = C_n\langle 1,2,3\rangle$； 若 $r = 4$，则 $H_2 = C_n\langle 1,2,3,4,5,7\rangle$； 若 $r = 5$，则 $H_2 = C_n\langle 1,2,\cdots,9,13\rangle$ 等均有 $\kappa(H_2) = \delta(H_2)$ 成立。

若 $r \geqslant 6$ 时，$H_2 = C_n\langle a_1, \cdots, a_k\rangle$ 含有跳跃因子，$a_i = i, i = 1, \cdots, 9$. 现对 $r \geqslant 6$ 时证明 $\kappa(H_2) = \delta(H_2)$ 成立。由引理 2，则须证

$$\forall\, m, m|n, N_m \geqslant \min\{m-1, r(r-1)m/n\} \tag{5}$$

成立。对 m：$1 \leqslant m \leqslant n$ 分以下几种情形：

情形 1 $1 \leqslant m \leqslant 10$

因 $H_2 = C_n\langle a_1, \cdots, a_k\rangle$ 含跳跃因子 $a_i = i, 1 \leqslant i \leqslant 9$，故

$$N_m \geqslant |\{1, 2, \cdots, m-1\}| = m-1 \geqslant \min\{m-1, r(r-1)m/n\}$$

即(5) 式成立。

情形 2 $11 \leqslant m \leqslant 19$

由情形 1

$$\begin{aligned} N_m &\geqslant |\{1, \cdots, 9, n-9, n-8, \cdots, n-1 \ (\bmod m)\}| \\ &= |\{1, \cdots, 9, m-9, \cdots, m-1 \ (\bmod m)\}| = m-1 \\ &\geqslant \min\{m-1, r(r-1)m/n\} \end{aligned}$$

亦有(5) 式成立。

情形 3 $20 \leqslant m \leqslant 30$

由情形 2

$$N_m \geqslant |\{1, \cdots, 9, m-9, \cdots, m-1 \ (\bmod m)\}| = 18$$

由(4) 式 $n > 2^{r-1} + 2^{r-2} + 2$，注意到 $r \geqslant 6$，可得

$$r(r-1)m/n \leqslant \frac{r(r-1)}{2^{r-1} + 2^{r-2} + 2} \cdot 30 \leqslant \frac{3}{5} \cdot 30 = 18 \leqslant N_m$$

仍有(5) 式成立。

情形 4 $\frac{n}{2} < m \leqslant n$

由 $m|n$ 有 $m = n$，从而 $r(r-1)m/n = r(r-1)$，此时

$$\begin{aligned} N_m &= |\{a_1, a_k, n-a_k, \cdots, n-a_1 (\bmod m)\}| = 2k = r(r-1) \\ &\geqslant \min\{m-1, r(r-1)m/n\} \end{aligned}$$

从而(5) 式也成立。

情形 5 $2^{r-2} + 2^{r-3} + 1 < m \leqslant n/2$

由于 $a_k = |d_r - d_{r-1}| = 2^{r-2} + 2^{r+3} + 1$，故 $N_m \geqslant k = \frac{1}{2}r(r-1)$，此时 $r(r-1)m/n \leqslant \frac{1}{2}r(r-1) \leqslant N_m$，有(5)式成立。

情形 6　存在 $j \leqslant r$ 使　$2^{j-3} + 2^{j-4} + 1 < m \leqslant 2^{j-2} + 2^{j-3} + 1$

注意到若 $j \leqslant 6$，则 $m \leqslant 2^{j-2} + 2^{j-3} + 1 \leqslant 25 < 30$，此情形已在情形 1 ～ 3 中讨论过。故可假设 $j \geqslant 7$，从而 $r \geqslant j \geqslant 7$. 下面对余数 r_i 按大小分段计数 N_m.

记 $A = \{a_1, \cdots, a_k, n - a_k, \cdots, n - a_1 (\mathrm{mod} m)\}$，将 A 按元素大小划分为 4 个子集 A_1, A_2, A_3, A_4：

$$A_1 = \{r_i \in A，且\ r_i \leqslant |d_{j-2} - d_{j-3}|\}$$
$$A_2 = \{r_i \in A，且\ |d_{j-2} - d_{j-3}| < r_i \leqslant |d_{j-1}|\}$$
$$A_3 = \{r_i \in A，且\ |d_{j-1}| \leqslant r_i \leqslant m - |d_{j-3} - d_{j-4}|\}$$

注：　$|d_{j-1} - d_{j-2}| - |d_{j-3} - d_{j-4}| > |d_{j-1}|$ 成立。

$$A_4 = \{r_i \in A，且\ m - |d_{j-3} - d_{j-4}| \leqslant r_i < m\}$$

则　$N_m = |A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$.

① 因 $A_1 \supseteq \{a_i ; a_i \leqslant |d_{j-2} - d_{j-3}|\} = \{a_i \in B_l, l = 2, \cdots, j-2\}$

故　$|A_1| \geqslant \sum_{l=2}^{j-2} |B_l| = 1 + \cdots + ((j-2) - 1) = \binom{j-2}{2} = \frac{1}{2}(j-2)(j-3)$.

② 对 A_2.

若 j 为奇数，则 $A_2 \supseteq \{d_{j-1} - d_{j-3}, d_{j-1} - d_{j-5}, \cdots, d_{j-1} - d_2\}$，

从而

$$|A_2| \geqslant \frac{(j-3)-2}{2} + 1 = \frac{j-3}{2}$$

若 j 为偶数，则 $A_2 \supseteq \{d_{j-3} - d_{j-1}, d_{j-5} - d_{j-1}, \cdots, d_3 - d_{j-1}\}$ 得

$$|A_2| \geqslant \frac{(j-3)-3}{2} + 1 = \frac{j-4}{2}$$

即

$$|A_2| \geqslant \begin{cases} (j-3)/2, & 若\ j\ 为奇数; \\ (j-4)/2, & 若\ j\ 为偶数。\end{cases}$$

③ 关于 A_3. 因为当 $|d_{j-3} - d_{j-4}| < a_i \leqslant |d_{j-2}| + 1$ 时，$|d_{j-1}| - 1 \leqslant |d_{j-1} - d_{j-2}| - (|d_{j-2}| + 1) < m - (|d_{j-2}| + 1) \leqslant m - a_i < m - |d_{j-3} - d_{j-4}|$ 成立，又 $n - a_i (\mathrm{mod}\ m) = m - a_i (\mathrm{mod}\ m)$，从而 $m - a_i \in A_3$，可得：

若 j 为奇数，则 $A_3 \supseteq \{m - a_i ; a_i \in \{d_{j-4} - d_{j-2}, d_{j-6} - d_{j-2}, \cdots, d_1 - d_{j-2}, d_2 - d_{j-2}\}\}$，

即

$$|A_3| \geqslant \left(\frac{(j-4)-1}{2} + 1\right) + 1 = \frac{j-1}{2}$$

若 j 为偶数，则 $A_3 \supseteq \{m - a_i ; a_i \in \{d_{j-2} - d_{j-4}, d_{j-2} - d_{j-6}, \cdots, d_{j-2} - d_2, d_{j-2} - d_1\}\}$，

即

$$|A_3| \geqslant \left(\frac{(j-4)-2}{2} + 1\right) + 1 = \frac{j-2}{2}$$

亦有

$$|A_3| \geqslant \begin{cases}(j-1)/2, & \text{若 } j \text{ 为奇数；}\\ (j-2)/2, & \text{若 } j \text{ 为偶数。}\end{cases}$$

④ 再看 $A_4 \supseteq \{m - a_l; a_l \in B_l, l = 2, \cdots, j-3\}$，这是由于当 $1 \leqslant a_l \leqslant |d_{j-3} - d_{j-4}| (< m)$ 时，$n - a_l (\bmod m) = m - a_l$；一方面 $m - a_l \leqslant m - 1 < m$，另一方面 $m - a_l \geqslant m - |d_{j-3} - d_{j-4}|$，得出

$$|A_4| \geqslant \sum_{l=2}^{j-3} |B_l| = 1 + \cdots + ((j-3)-1) = \binom{j-3}{2} = \frac{1}{2}(j-3)(j-4)$$

除上①、②、③和④即得

$$N_m \geqslant \begin{cases}\binom{j-2}{2} + \frac{j-3}{2} + \frac{j-1}{2} + \binom{j-3}{2}, & \text{若 } j \text{ 为奇数；}\\ \binom{j-2}{2} + \frac{j-4}{2} + \frac{j-2}{2} + \binom{j-3}{2}, & \text{若 } j \text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} j^2 - 5j + 7, & \text{若 } j \text{ 为奇数；}\\ j^2 - 5j + 6, & \text{若 } j \text{ 为偶数}\end{cases}$$

注意到 $j \geqslant 7$ 可知 $N_m \geqslant \frac{1}{2}j(j-1)$

另一方面 $r(r-1)m/n \leqslant r(r-1) \cdot \frac{2^{j-2} + 2^{j-3} + 1}{2^{r-1} + 2^{r-2} + 2} \leqslant \frac{1}{2}j(j-1)$，即最终仍有(5)式成立。

综合以上 6 种情形，即得证 $\forall m, m|n$，均有(5)式成立，由引理 2 即可得证定理 1。

由定理 1 得出

定理 2 对任意的整数 $r \geqslant 2$，n 满足(4)式，则 H 具有最佳连通性，即

$$\kappa(H) = (r-1)\delta(H), \lambda(H) = \delta(H) \text{ 都达到最大值}$$

证 由定理 1 得 $\kappa(H) = \kappa(H_2) = r(r-1) = (r-1)\delta(H)$. 再由(1)式可知该式中全部等号成立，并有 $\lambda(H) = \delta(H)$.

参 考 文 献

1 陈廷槐，康泰，姚荣．超图的连通性及容错多总线系统的设计．中国科学，A 辑，1987，(12)：1309～1319

2 Chen Tinghuai. Fault diagnosis and fault tolerance. Berlin:Springer-Verlag，1991，157～180

3 许小满，孙雨耕，杨山 等．超图理论及其应用．电子学报，1994，22(8)：65～72

4 Boesch F T. Synthesis of reliable networks:a survey. IEEE Trans. Reliab. 1986，35(3)：240～246

5 何中市，杨晓帆，陈四清．拟正则图的最大线图连通度及其应用．重庆大学学报，1995，18(2)：21～26

6 Boesch F T，Tindell R. Circulants and their connectivity. Journal of Graph Theory. 1984，(8)：487～499

7 Berge C. Graphs and hypergraphs. London:North-Holland. 1976，389～496