

8 44-53

# 小波分析在油气田地球物理勘探中的应用

## Application of Wavelet Analysis in Geophysical Exploration of Petroleum-Gas Fields

段虞荣<sup>①</sup>  
Duan Yurong

郑继明<sup>②\*</sup>  
Zheng Jiming

段绍光<sup>②</sup> TE19  
Duan Shaoguang 0174.22

(<sup>①</sup> 重庆大学系统工程及应用数学系, 重庆, 630044; <sup>②</sup> 四川联合大学物理系, 第一作者 66 岁, 男, 教授)

**摘要** 阐明了具有 Lipschitz 指数的地震道信号奇异性的数学特征。对油气勘探区的实际人工地震资料, 选取具有紧支集的二次样条函数作为小波基。然后将采样所得的数据作离散二进小波变换, 采用 Mallat 塔式算法对地震波信号进行分解与重构。计算出小波变换模的极大值, 并与所给阈值进行比较。由该奇点所对应的时间  $t$  确定其深度位置, 从而对地震道资料进行高分辨率处理。采样间隔为  $\Delta t = 2$  ms, 采样区间为 [900, 1400], 采样数据个数为 251。用实际测井资料检验, 彼此十分吻合。

**关键词** 小波分析; 油气田; 地球物理勘探; 地震道; Lipschitz 指数; Mallat 塔式算法; 多分辨率; 奇异性

中国图书资料分类法分类号 O174.22; P315.3; P315.8; TE19; TH115

**ABSTRACT** Explains the mathematical characteristics of the singularities of signals of seismic track with the Lipschitz index, choosing the quadratic spline functions with compact support set as the wavelet bases for the practical artificial seismic data of the region of petroleum-gas exploration, taking the discretized dyadic wavelet transforms for the data obtained by sampling, and applying the Mallat pyramid algorithm to decompose and reconstruct the seismic wave signal, computing the maximal moduli of the wavelet transforms, and comparing with the thresholds. From the time  $t$  corresponding to the singularity point one may determine the position of deep of the orebody, consequently accomplishing the high resolution for the data of seismic track. The sample steplength is  $\Delta t = 2$  ms. The sample interval is [900, 1400] and the number of sample data is 251. Testing by the practical data of the drilling wells, they agree quite well with each other.

**KEYWORDS** wavelet analysis; petroleum-gas field; geophysical exploration; seismic track; Lipschitz index; Mallat pyramid algorithm; multiresolution; singularity

### 0 引 言

小波分析是近年来蓬勃发展起来的一个新的数学分支, 目前已成为国际上极为活跃的

\* 收文日期 1996-05-07

\*\* 现在重庆邮电学院工作

研究领域之一,它已被广泛地应用于信号处理、图象识别与处理、语言人工合成、地震勘探<sup>[1]</sup>和大气湍流等方面<sup>[2~5]</sup>。

在对石油、天然气和煤矿的人工地震勘探(或称地球物理勘探,简称物探)中,提高地震资料的信噪比和分辨率一直是地震资料处理所追求的目标,高分辨率地震勘探在石油或天然气领域尤其需要。近年来,小波变换在反射波地震勘探中的作用日益增长。按信号分析的观点,能量有限信号  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的小波变换定义为通过一组带通滤波器的输出响应

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

其中每个滤波器的单位脉冲响应  $\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  是能量有限的带通函数(分析小波)  $\psi(t)$  的伸缩形式。由于取自同一原形的伸缩形式,所有滤波器便具有常数相对带宽特性,即滤波器的中心频率与均方根带宽成正比。换言之,这些滤波器具备面积相等而长宽比随  $a$  变化的时-频分辨率胞元。所以小波变换在时域和频域均有良好的局部化性质。

在(1)式中,取  $a = a_0^m, b = nb_0 a_0^m, a_0 > 1, b_0 \in \mathbb{R}$ , 则有信号  $f(t)$  的离散小波变换:

$$C_f(m, n) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (2)$$

由(2)式可见,小波变换对不同的频率成分(相应于  $a_0^{-m}$ ) 在空间域上采样步长(即  $b_0 a_0^m$ ) 是具有调节作用的,高频者(对应于小的  $m$  值) 采样步长小,低频者(对应于大的  $m$  值) 采样步长大。正是在这一意义下,小波变换被誉为“数学显微镜”。由于(1)、(2)式知,可将小波变换视为频率和时间的二元函数,这就为我们在小波变换时域内按不同时间对衰减了的频率进行补偿提供了新颖思路。加上实际地层的反射系数随频率增高,振幅能量呈线性增强趋势,因而用小波变换对实际记录进行处理,可以把淹没的高频信息突出来,从而提高地震资料的分辨率。本文利用正交小波变换对实际物探资料进行了高分辨率处理。

在地球物理勘探中,检测地壳物理物性参数的奇性是非常有意义的。例如,断层会使重力异常产生阶跃(突变),地震波的传播在地壳介质的分界面处会产生速度和方向的变化,这些都是地球物理信号的奇性。判断出奇性的大小和位置就可以对异常现象作出解释,所以函数的奇性检测对地球物理勘探具有特殊意义。小波变换由于同时具有空间域与频率域的局部化性质,S. Mallat 等提出了使用小波变换的极大模来检测信号之奇性的算法。利用小波变换具有良好的时-频定位功能,根据信号与噪声的奇性不同可以估计波达时间,本文根据地震道的奇性特征与分辨率,阐明了具有 Lipschitz 指数的地震道信号奇性的数学特征。所谓地震道信号,即是地震道数据(剖面)的一系列地震波形道所组成的信号。给出了利用小波变换模的极大值来检测地震道信号奇点的计算方法。注意到对地震信号作反褶积处理,通常总是假定在一沉积剖面中产生的反射波序列是由各层中岩石波阻抗的明显差异所产生的。一般说来,波阻抗是定标的,其功率谱与空间频率成反比,从而反射波序列具有与频率成反比的功率谱。

另一方面,考虑到在物探中,在地表的采样实际上是地下地质体特征在地表反映的某种近似。分辨率的高低,即采样密度都必须要求在能够识别勘查目标的范围内。对于给定的采样值序列  $\{x_n\}, n = 1, \dots, N$ , 在  $\{x_n\}$  中既含有浅部的细节信息,又含有深部的构造信息,还含有噪声。从  $\{x_n\}$  中将它们区分开来,即将异常分解成不同的频率成分,从而识别大小不同,埋

深不同的矿体,搞清地质构造,都是非常重要的问题。小波多分辨率分析理论为物探提供了理论依据,而 Mallat 快速塔式算法则是解决问题的一条捷径<sup>[6]</sup>。本文结合油气勘探区的实际的地震道采样数据,通过寻找地震波信号的奇性大小和所在的位置,用小波变换对地震资料进行了高分辨率处理。

## 1 小波分析原理

### 1.1 小波变换时频分辨率特征

#### 1.1.1 短时 Fourier 变换

根据信号系统理论,一旦给定短时 Fourier 变换(STFT)的时窗函数  $g(t)$ <sup>[7]</sup>,它所具有带通特性的频谱函数也被唯一确定。在因子  $e^{-i\omega t}$  的作用下,其频谱曲线被平移到频率为  $\omega$  的点。由于受 Heisenberg 测不准原理的限制,信号的时宽  $\Delta t$  与频宽  $\Delta f$  之积为一常数且有下确界

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1 / (4\pi) \quad (3)$$

STFT 也有一些缺点,一是不存在足够衰减快的标准正交的窗口基  $\{g_{m,n}\}$ ,二是它不适宜于分析高频而短时的信号。而小波变换正具有这种自适应性。STFT 也有一些优点,一是窗口框架在时-频域是对称的,另一优点是任一窗口框架  $\{g_{m,n}\}$  一定具有对偶窗口框架  $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ <sup>[8]</sup>。

#### 1.1.2 小波变换

从信号处理的角度上讲,小波变换是一种谐波分析方法,它是由法国地球物理学家 A. Grossmann 和 I. Morlet<sup>[1,9]</sup> 在 80 年代初提出的。

定义 1 设  $\psi \in L^2 \cap L^1$  且  $\hat{\psi}(0) = 0$ , 则按如下方式生成的函数族  $\{\psi_{a,b}\}$

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (4)$$

称为分析小波或连续小波,  $\psi$  叫基小波。

定义 2 设  $\psi$  为基小波,  $\{\psi_{a,b}\}$  按(4)式给出, 则对  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $f(t)$  的小波变换定义为:

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (5)$$

这说明小波变换是将信号  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  用小波函数集  $\{\psi_{a,b}(t)\}$  分解的运算。

定义 3 设  $\psi \in L^1 \cap L^2$  且满足  $C_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$  (6)

则  $\psi$  称为允许小波。

允许小波一定是基小波。对于由允许小波产生的信号的连续小波变换,信号  $f(t)$  可由  $W_f(a,b)$  按其逆变换来恢复,即相应的小波逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbf{R}^2} W_f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (7)$$

且有 
$$\iint_{\mathbf{R}^2} |W_f(a,b)|^2 \frac{da db}{a^2} = C_\psi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \quad (8)$$

取  $a = a_0^n, b = nb_0 a_0^n, a_0 > 1, b_0 \in \mathbf{R}$ , 则有函数  $f(t)$  的离散小波变换

$$W_f(m,n) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (9)$$

从(9)式可看出,小波变换对不同的频率成分(相应于  $a_0^{-m}$ ) 在空间域上的采样步长(即  $b_0 a_0^n$ ) 是具有调节作用的,由(5)式可见,小波变换表现为一系列的褶积运算。对信号进行小波分

解,实质上就是对信号用不同的滤波器进行滤波,这些滤波器的脉冲响应就是一系列的小波基。对应于不同的尺度因子 $a$ 的小波基,将信号分解到相应的频带。显然,尺度因子越小,对应频带的中心频率就越高,即小波变换把信号按不同尺度进行分解,它可以表示为一个信号和一个滤波因子的卷积(褶积)。

下面假定 $\psi$ 与 $\hat{\psi}$ 都满足(6)式。如果窗口函数 $\psi$ 的中心与半径分别用 $t^*$ 与 $\Delta_v$ 给出,则函数 $\psi_{a,t^*}$ 是中心在 $b+at^*$ ,半径为 $a\Delta_v$ 的一个窗口函数,因此,(5)式表示小波变换给出了信号 $f(t)$ 具有一个时间窗为

$$[b+at^*-a\Delta_v, b+at^*+a\Delta_v] \quad (10)$$

的局部信息。这个窗对于小的 $a$ 值变窄,而对于大的 $a$ 值则变宽。同时还给出了信号 $f(t)$ 的频谱 $\hat{f}(\omega)$ 具有一个频率窗为

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_s, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_s\right] \quad (11)$$

的局部信息。假设 $\hat{\psi}$ 的中心 $\omega^* > 0$ ,则这个窗具有中心频率 $\frac{\omega^*}{a}$ 且带宽是 $\frac{2\Delta_s}{a}$ ,于是有中心频率/带宽 =  $(\omega^*/a) / (2\Delta_s/a) = \omega^*/2\Delta_s$ 。

(12)式与尺度 $a$ 无关。因此,如果频率变量是中心常数 $\omega^*$ 的 $a^{-1}$ 倍,则由(11)式给出的适配带通滤波器有如下性质:中心频率与带宽之比与中心频率的位置无关。这就称为“常数-Q滤波”。

如果把 $\frac{\omega^*}{a}$ 作为频率变量 $\omega$ ,那么在 $t-\omega$ 平面上具有一个矩形时间-频率窗

$$[b+at^*-a\Delta_v, b+at^*+a\Delta_v] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_s, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_s\right] \quad (13)$$

这个矩形窗的宽度由时间窗的宽度 $2a\Delta_v$ 决定。这样,对于检测高频信号(即小的 $a > 0$ )窗会自动变窄,而对于检测低频信号(即大的 $a > 0$ ),窗会自动变宽。这类似于具有自动“变焦距”的功能。

## 1.2 小波函数的引进

小波函数源于多分辨率分析或称多尺度分析(Multi-Resolution Analysis, MRA)。其基本思想是将 $L^2$ 中函数 $f(x)$ 表示为一系列逐次逼近式,其中每一个逼近式都是 $f(x)$ 经过平滑后的形式,它们分别对应于不同的分辨率。

### 1.2.1 多分辨率分析的定义<sup>[6]</sup>

空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个多分辨率分析或逼近,倘若下列诸条件满足:

- 1) 单调性  $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$ ;
- 2) 逼近性  $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R})$ ;
- 3) 伸缩性  $u(x) \in V_j \Leftrightarrow u(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$ ;
- 4) 平移不变性  $u(x) \in V_0 \Rightarrow u(x-k) \in V_0 (k \in \mathbf{Z})$ ;
- 5) Riesz基 存在 $g \in V_0$ ,使得 $\{g(x-k) | k \in \mathbf{Z}\}$

构成 $V_0$ 的Riesz基,即对任何 $u \in V_0$ ,存在唯一序列 $\{a_k\} \in l^2$ 使得 $u(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k g(x-k)$ ;反之,任意序列 $\{a_k\} \in l^2$ 确定一函数 $u \in V_0$ ,且存在正数 $A, B$ ,其中 $A \leq B$ ,使得下列不等式成立:

$$A \|u\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |a_k|^2 \leq B \|u\|^2 \quad \forall u \in V_0$$

**定理1** 存在函数 $\varphi(x) \in V_0$ ,使 $\{\varphi(x-k) | k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $V_0$ 的规范正交基。

记  $\varphi_{j,s}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) \quad (14)$

由定理1知 $\{\varphi_{j,s}(x)\}$ 构成空间 $V_j$ 的正交基,故可取 $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_1 \subset V_0$ ,并有

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(x - k) \tag{15}$$

两端作 Fourier 变换, 有  $\hat{\varphi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ , 其中  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k} \in L^2(0, 2\pi)$  称为序列  $\{h_k\}$  的 Fourier 变换, 也称为频率响应  $\{h_k\}$  的传递函数. 在工程中,  $\{h_k\}$  实际上为一低通滤波器的滤波因子.

1.2.2 小波函数

利用多分辨率分析来构造小波分析中的小波函数.

设  $W_j$  为  $V_j$  在  $V_{j-1}$  中的正交补, 即  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ , 则  $W_j$  具有下列性质:

- 1)  $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R})$  ( $j \in \mathbb{Z}$ );
- 2)  $u(t) \in W_j \Rightarrow u(t - 2^j k) \in W_j$  ( $j, k \in \mathbb{Z}$ );
- 3)  $u(t) \in W_j \Leftrightarrow u(2t) \in W_{j-1}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ );
- 4)  $P_{W_j} u \rightarrow 0$ , 当  $|j| \rightarrow \infty$  时,  $\forall u \in L^2(\mathbb{R})$ .

和  $V_j$  一样, 希望找出一个确定的函数  $\psi \in W_0$ , 使得对每个  $s \in \mathbb{Z}$ , 函数系  $\{\psi_{s,t} | k \in \mathbb{Z}\}$  构成空间  $W_s$  的规范正交基, 其中

$$\psi_{s,t}(x) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi(2^{-s}x - k) \tag{16}$$

注意到诸空间  $W_s$  的平移不变性与它们之间的伸缩不变性, 因此只要找到函数  $\psi \in V_{-1}$  使得  $\{\psi(x - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $W_0$  的规范正交基即可. 对于  $\psi \in V_{-1}$ , 有

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{-1,s}(x) = 2^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) \tag{17}$$

或等价地

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(x - k) \tag{18}$$

其中

$$g_k = \langle \psi(x), \varphi_{-1,s}(x) \rangle = \langle \psi_{1,0}, \varphi_{0,k} \rangle$$

$$(17) \text{ 式或 } (18) \text{ 式在频域里的形式为 } \hat{\psi}(2\omega) = G(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \tag{19}$$

其中  $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-i\omega k} \in L^2(0, 2\pi)$  为频率响应  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  的传递函数, 而  $\{g_k\}$  实际上为一带通滤波器的滤波因子.

**定理 2<sup>[6]</sup>** 1)  $\psi \in W_0 \Leftrightarrow H(\omega)\bar{G}(\omega) + H(\omega + \pi)\bar{G}(\omega + \pi) = 0$ ; 2)  $\{\psi(x - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成正交系  $\Leftrightarrow |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1$ ; 3) 上面两式是函数系  $\{\psi(x - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成空间  $W_0$  的规范正交基的充要条件. 证略.

**推论** 取  $G(\omega) = e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi)$ , 则由 (17) 式确定的函数  $\psi$  的伸缩、平移系  $\{\psi_{s,t}(x) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi(2^{-s}x - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  构成空间  $W_s$  的规范正交基. 因此,  $\{\psi_{s,t} | j, k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的规范正交基. 由推论中  $G(\omega) = e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi)$  易知  $g_k = (-1)^{k-1} \bar{h}_{k-1}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

1.3 离散二进制小波变换

在信号分析里, 有时需要把(正)频率轴划分为邻接的频带. 为了计算的有效性和讨论的方便性, 只考虑“二进划分”, 即  $(0, \infty) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \Delta_s, 2^{j+1} \Delta_s]$

其中  $\Delta_s > 0$  是基小波  $\psi$  的 Fourier 变换的半径, 即

$$\Delta_s = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

且  $\omega \hat{\psi}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ .

$$\text{若小波 } \psi(t) \in L^2(\mathbb{R}), \text{ 并定义 } \psi_{s,t}(t) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi(2^{-s}t - k) \tag{22}$$

其中  $s$  称为尺度(或标度)参数,  $k$  称为位置参数. 对于  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 其尺度  $s$  及位置  $k$  的小

波变换也可由卷积来定义,即(令  $\phi_s(t) = \phi(t/s)/s$ )

$$W_s f(t) = (f * \phi_{s,t})(t) = (f * \phi_s)(t) \quad (23)$$

$f * \phi_s(t)$  起系统作用,小波变换可视为输入为  $f(t)$  时,在系统  $\phi_s(t)$  下的响应。

尺度参数  $s$  刻划了信号特征的大小和规律,在实践中,尺度参数  $s$  必须离散化。为简单计, $s$  可简化为二进制序列  $\{2^j | j \in \mathbb{Z}\}$ ,则有下面的离散二进小波变换

$$W_{2^j} f(t) = (f * \phi_{2^j,t})(t) = 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi\left(\frac{t-x}{2^j}\right) dx \quad (24)$$

同样,亦可将尺度函数  $\phi_s(t)$  离散化,即  $\phi_{2^j,t}(t) = \frac{1}{2^j} \phi\left(\frac{t}{2^j}\right)$  (25)

$$\text{定义} \quad S_{2^j} f(t) = \phi_{2^j,t}(t) * f(t) \quad (26)$$

为多分辨率逼近,这样便得到下面的定理。

**定理 3** 假设最小尺度为 1,最大尺度为  $2^J$ ,则  $S_1 f(t), S_{2^j} f(t)$  分别为在尺度 1 和尺度  $2^j$  上的多分辨率逼近,而  $W_{2^j} f(t) (j = 1, \dots, J)$  为在尺度  $1, \dots, 2^j$  上的小波分解,且有

$$\|S_1 f(t)\|^2 = \sum_{j=1}^J \|W_{2^j} f(t)\|^2 + \|S_{2^J} f(t)\|^2 \quad (27)$$

由于在实践中得到的信号均为离散信号,任何能量有限的离散信号都可看作是在尺度 1 上的一个函数光滑化的均匀采样,即尺度为 1 的多分辨率逼近。为此,称离散信号  $\{S_{2^j} f(t), [W_{2^j} f(t) | 1 \leq j \leq J]\}$  为  $d_s = S_1 f(t)$  的离散小波变换。任何一个离散信号均可用离散小波变换来进行分解与重构。

#### 1.4 Mallat 算法

Mallat 算法即 Mallat 小波分解与重构算法,任何一个离散信号均可用小波变换进行分解和重构。

设  $\{V_j\} (j \in \mathbb{Z})$  为给定的多分辨率分析,  $\varphi$  和  $\psi$  分别是相应的尺度函数和小波函数。现对一地震记录  $f(x)$  进行分析。由于地震勘探仪器记录的信号总是只具有有限分辨率,故假设  $f \in V_{J_1}, J_1$  为一确定的整数,从而便有分解

$$f(x) = A_{J_1} f(x) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} C_{J_1,t} \varphi_{J_1,t}(x) \quad (28)$$

注意到  $\langle \varphi_{J_1,t}, \varphi_{J_1,t} \rangle = \bar{h}_{t-2m}, \langle \varphi_{J_1,t}, \psi_{J_1+1,m} \rangle = \bar{g}_{t-2m}$

$$\text{故有} \quad f(x) = A_{J_1} f(x) = A_{J_1+1} f(x) + D_{J_1+1} f(x) \quad (29)$$

其中  $A_{J_1+1} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{J_1+1,n} \varphi_{J_1+1,n}, D_{J_1+1} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{J_1+1,n} \psi_{J_1+1,n}$

$$\text{而} \quad C_{J_1+1,n} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{h}_{t-2n} C_{J_1,t}, D_{J_1+1,n} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{g}_{t-2n} C_{J_1,t} \quad (30)$$

引进无穷矩阵  $H = (H_{m,t}), G = (G_{m,t})$ , 其中  $H_{m,t} = \bar{h}_{t-2m}, G_{m,t} = \bar{g}_{t-2m}$  则(30)式可写成简洁形式  $C_{J_1+1} = H C_{J_1}, D_{J_1+1} = G C_{J_1}$ , 于是

$$f(x) = A_{J_1} f(x) + \sum_{j=J_1+1}^{J_2} D_j f(x) \quad (31)$$

\* (27) 式表明  $S_1 f(t)$  的高频成分可由  $W_{2^j} f(t) (1 \leq j \leq J)$  予以恢复。

其中  $A_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \varphi_{j,k}(x), D_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ , 依次类推, 便有

$$C_{j+1} = HC_j, D_{j+1} = GC_j, \quad j = J_1, J_1 + 1, \dots, J_2 - 1 \quad (32)$$

(32) 式便是 Mallat 塔式分解算法。对 (29) 式两端同时与函数  $\varphi_{j,k}$  作内积, 得

$$C_{j,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{k-2n} C_{j+1,n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{k-2n} D_{j+1,n}$$

即  $C_{j,k} = H^* C_{j+1} + G^* D_{j+1} \quad (33)$

其中  $H^*$  和  $G^*$  分别是  $H$  和  $G$  的对偶算子 ( $H$  和  $G$  的共轭转置矩阵)。

称  $A_j f$  为  $f$  在  $2^j$  分辨率下的连续逼近,  $D_j f$  为  $f$  在  $2^j$  分辨率下的连续细节; 而称相应的数列  $\{C_j\}$  和  $\{D_j\}$  分别为在分辨率  $2^j$  下的离散逼近和离散细节。  $A_j f$  可理解为函数  $f$  的频率不超过  $2^{-j}$  的成分; 而  $D_j f$  则是  $f$  的频率介于  $2^{-j}$  和  $2^{-j+1}$  之间的成分。因此, (31) 式和 (32) 式表明, 按 Mallat 分解算法, 将函数  $f$  分解成不同的频率通道成分, 并将每一频率通道成分又按相位进行了分解——频率越高者, 相位划分越细, 反之则越疏。

(33) 式对一般的指标也成立。故有如下的 Mallat 重构算法:

$$C_j = H^* C_{j+1} + G^* D_{j+1} \quad j = J_2 - 1, \dots, J_1 \quad (34)$$

## 2 基于小波变换的突变信号检测算法

### 2.1 小波变换与信号奇性的关系

小波变换的一个重要特征就是它能表征函数(信号)的奇性。在数学上, 函数的局部奇性是用 Lipschitz 指数来刻划的。小波变换由于有很好的时频定位功能, 它不仅能局部检测奇点, 而且还能估算出相应的 Lipschitz 指数的大小。称无限次可微的函数是光滑的或没有奇性。若函数在某处有间断点或某阶导数不连续, 则称函数在该处有奇性。

**定义** 设  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 称函数  $f(t)$  在区间  $[a, b]$  上是一致 Lipschitz  $\alpha$  的, 当且仅当存在常数  $K$ , 使得  $\forall t_0, t_1 \in [a, b]$ , 有  $|f(t_0) - f(t_1)| \leq K |t_0 - t_1|^\alpha$

且把使上式成立的所有  $\alpha$  的上界  $\alpha_0$  称为函数  $f(t)$  在  $[a, b]$  上的 Lipschitz 指数。

一般地, 在  $t = t_0$  处函数  $f(t)$  的 Lipschitz 指数越高, 则  $f(t)$  在  $t_0$  越光滑。

**定理 4<sup>[10]</sup>** 设  $0 < \alpha < 1$ , 则函数  $f(t)$  在  $[a, b]$  上是一致 Lipschitz  $\alpha$  的充要条件是存在常数  $K > 0$ , 使得  $|W_S f(t)| \leq KS^\alpha \quad t \in [a, b]$

若小波具有紧支集, 则  $W_S f(t_0)$  取决于  $f(t)$  正比于尺度  $S$  对应的  $t_0$  邻域的大小, 尺度  $S$  愈精细, 它提供的局部信息量愈多。

进一步假定小波  $\phi(t)$  具有  $n$  阶消失矩, 且  $n$  阶连续可微并有紧支集, 则有以下结论:

设  $n$  为正整数,  $\alpha > n$ ,  $f(t) \in L^2$ . 若  $f(t)$  在  $t_0$  具有 Lipschitz  $\alpha$  的奇性, 则存在常数  $A$ , 使得对属于  $t_0$  邻域的所有点和对任意的尺度  $S$  有  $|W_S f(t)| \leq A(S^\alpha + |t - t_0|^\alpha)$

反之, 设  $\alpha < n$  为一非整数, 若下列两条件成立:

1) 存在常数  $K_1$  和一些  $\epsilon > 0$ , 对任意的尺度  $S, \forall t \in N(t_0, \epsilon)$  均有  $|W_S f(t)| \leq K_1 S^\alpha$

2) 存在常数  $K_2$ , 使得  $|W_S f(t)| \leq K_2(S^\alpha + |t - t_0|^\alpha / |\log |t - t_0||)$

则  $f(t)$  在  $t_0$  处的奇性为 Lipschitz  $\alpha$ .

这就表明小波变换特别适用于估计函数的局部奇性。在信号处理中常常需要检测和表征信号的瞬态特性和奇性, 小波变换成为有力的工具。

## 2.2 小波变换用于信号突变检测的原理

一个实函数  $\theta(x)$ , 称为光滑函数<sup>[10]</sup>, 只要它满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1 \quad \text{且} \quad \theta(x) = o\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad (35)$$

光滑函数的能量通常集中在低频段, 因此  $\theta(x)$  也可看作一个低通滤波器的脉冲响应。若一个光滑函数  $f(x)$  为低通滤波器的脉冲响应函数, 则  $f(x)$  与其卷积可使  $f(x)$  的高频衰减而不改变低频部分, 因而使  $f(x)$  磨光。工程计算中一个常用的例子是 Gauss 函数  $g_\alpha(t)$ :

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

及三次样条函数  $\theta(t)$ , 满足  $\hat{\theta}(\omega) = \left[ \frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}} \right]^4$

设  $\theta(x)$  为一光滑函数,  $\psi^1(x)$  和  $\psi^2(x)$  是如下定义的小波函数:

$$\psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad \psi^2(x) = \frac{d^2\theta(x)}{dx^2}$$

记  $\theta_s = \frac{1}{s} \theta\left(\frac{x}{s}\right)$ , 则对一个实函数  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 有下面的小波变换

$$W_s^1 f(x) = W^1 f(s, x) = f * \psi_s^1(x) = f * \left\{ s \frac{d\theta_s(x)}{dx} \right\} = s \frac{d}{dx} (f * \theta_s(x)) \quad (36)$$

$$W_s^2 f(x) = W^2 f(s, x) = f * \psi_s^2(x) = f * \left\{ s^2 \frac{d^2\theta_s(x)}{dx^2} \right\} = s^2 \frac{d^2}{dx^2} (f * \theta_s(x)) \quad (37)$$

可见  $W_s^1 f(x)$  和  $W_s^2 f(x)$  分别正比于经  $\theta_s(x)$  磨光  $f(x)$  后得到的函数的一阶导数和二阶导数。由数学分析知, 函数的一阶导数的极值点对应其二阶导数的零点, 同时也是函数本身的拐点, 且一阶导数的绝对值的最大值对应函数的陡变, 而最小值 (不等于 0) 则与函数的缓变相对应。因此,  $W_s^1 f(x)$  的幅值极大点对应于  $f(x)$  的突变点, 而  $W_s^2 f(x)$  的零点则与  $f * \theta_s(x)$  的拐点相一致。因此, 如果选择小波为光滑函数的一阶导数, 则由小波变换  $W_s^1 f(x)$  的幅值 (模值) 极大点就可以检测到信号  $f(x)$  的突变点 (奇点)。这就是小波变换用于信号突变检测的基本原理<sup>[10-11]</sup>。

## 2.3 地震道的奇性检测算法

为了检测地震道信号的突变点 (即奇性), 首先要选取一光滑函数的一阶导数作为小波函数。在油气勘探区的实际的地震记录中, 选取具有紧支集的二次样条小波  $\psi(x)$ , 它是光滑

函数  $\theta(x)$  的一阶导数<sup>[2]</sup>, 它们的 Fourier 变换分别为  $\hat{\psi}(\omega) = -i\omega \left[ \frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}} \right]^4$ ,  $\hat{\theta}(\omega) = \left[ \frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}} \right]^4$ ,

具有紧支集的二次样条小波相应的滤波器的传递函数为

$$H(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \left\{ \cos \frac{\omega}{2} \right\}^3, \quad G(\omega) = 4e^{\frac{i\omega}{2}} \left\{ \sin \frac{\omega}{2} \right\}^3 \quad (38)$$

相应 Z 变换式为  $H(Z) = \frac{1}{8} Z^{-1} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} Z + \frac{1}{8} Z^2$ ,  $G(Z) = -2 + 2Z$  (39)



表 1 对应数字滤波器  $H, G$  的有限脉冲响应值

$n$	-1	0	1	2
$H$	0.125	0.375	0.375	0.125
$G$	0	-2.0	2.0	0

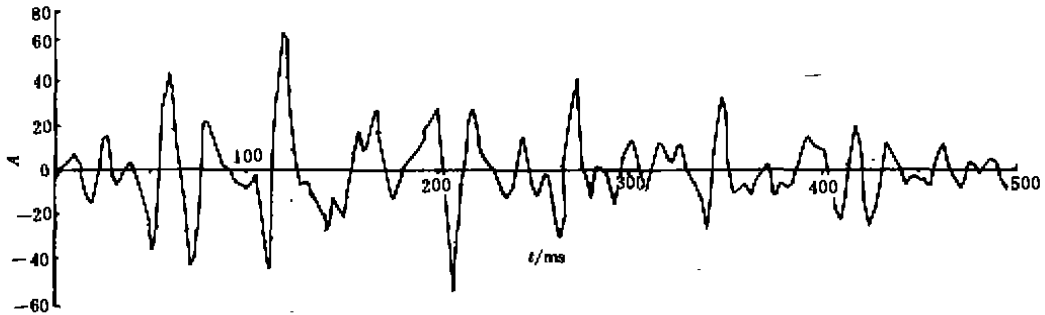


图 1 一道地震曲线采样图

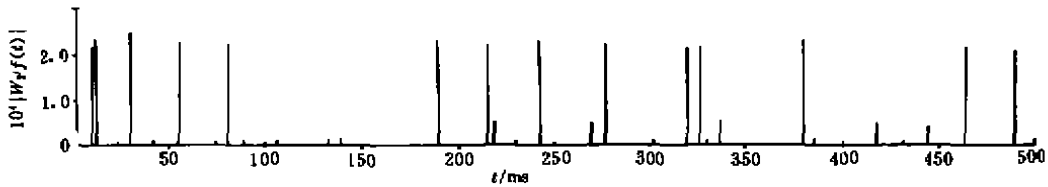


图 2 正交小波变换模极大值图

然后将采样所得的数据  $f(t)$  作离散二进小波变换  $W_{2^j} f, 1 \leq j \leq J$ , 使用 Mallat 算法, 便可计算出  $|W_{2^j} f|$ , 并与预先给定的阈值作比较, 就可检测出该道信号是否有奇性, 以及奇点所在的位置。

根据小波变换能检测信号奇性的原理和上面所选择的小波函数, 已对一实际的地震道数据利用 Mallat 算法进行了分解与重构, 计算出小波变换模的极大值, 并与所给阈值进行比较。由于在信号的剧变处, 小波变换模取极大值, 且同时在几个连续尺度上都取极大值。因此, 如果该地震道具有奇性, 就可根据该奇点所对应的时间  $t$  确定其深度位置, 从而对地震资料进行高分辨率处理。所处理的地震道数据, 其采样间隔是  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ , 采样区间为  $t \in [900, 1400]$ , 采样数据个数为 251。根据采样数据所作的地震曲线采样图及相应的小波变换模极大值图参见图 1 及图 2。信号奇性检测框图参见图 3。

利用小波变换检测信号奇性的原理, 选择

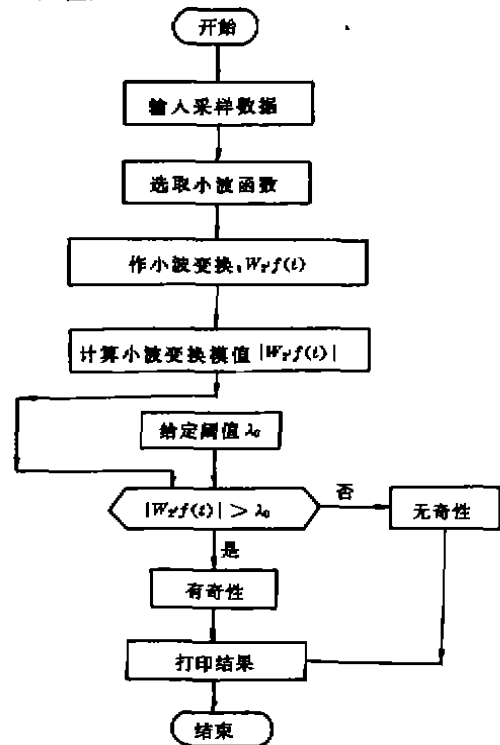


图 3 信号奇性检测框图

了具有紧支集的二次样条函数  $\phi(x)$ , 对实际地震资料进行了处理, 结果如表 2 所示。从表中可见该道信号奇性的位置与大小: 当  $t = 900 + 380 = 1280$  ms 时, 信号的小波变换最大模值为  $2.33 \times 10^{-4}$ , 表示在相应的深度处信号具有奇性, 即对应的该薄层地质构造异常。通过对剖面各道数据作这样的处理, 便可找出地震道剖面相应位置的奇性大小, 再结合相关的地震资料, 就可判断出相应薄层是否为断层、含油气异常等地质情况, 从而为油气的检测与油气井的钻探定位提供了一种新的勘探方法<sup>[12]</sup>。由于利用了小波变换的这种良好的时频局部化性质, 突出了信号的局部特征, 所以通过这样的处理也达到了提高地震资料分辨率的目的。

表 2 地震道信号小波变换模(阈值  $\lambda_0 = 1.0 \times 10^{-4}$ )

时间 (+ 900 ms)	8	10	28	54	80	190	216	242	276	314	322	380	464	490
模值 ( $\times 10^{-4}$ )	2.21	2.24	2.2	2.22	2.22	2.26	2.21	2.28	2.24	2.21	2.25	2.33	2.22	2.22

### 3 结 语

本文针对实际地震资料提出了奇性检测算法, 利用小波变换良好的时频局部化特性, 能够较准确地检测出地震道信号是否具有奇性, 以及出现奇性的位置, 这对于提高地震资料的分辨率和石油、天然气的勘探都具有重要的应用价值。

### 参 考 文 献

- 1 Morlet J, Avens G, Fourgeau I. et al. Wave propagation and sampling theory, *Geophysics*, 1982, 47, 203~236
- 2 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, 1992. 17~52, 129~166
- 3 Rioul O, Vetterli M. Wavelet and signal processing. *IEEE SP Magazine*, 1991. 14~38
- 4 Meyer Y(ed.). Wavelets and Applications. 1992. 286~352
- 5 刘贵忠, 邱双亮. 小波分析及应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1992. 159~164
- 6 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition, the wavelet representation. *IEEE Trans. PAMI*, 1989, 11(7), 674~693
- 7 Gabor D. Theory of Communication. *J. Inst. Electr. Engrg. London*, 1946, 93(II), 429~457
- 8 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京: 世界图书出版社, 1995. 208~216
- 9 Grossmann A, Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.* 1984, 15, 723~736
- 10 Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. on IT*, 1992, 38, 617~643
- 11 王玉平, 蔡元龙. 小波分析在信号处理中的应用. *无线电工程*, 1994, 24, 11~18
- 12 段虞荣, 高如曾, 何光明. 用分形理论和小波变换相结合的方法来选油气的勘探井位. 见: 辛厚文主编. 分形理论及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1993. 366~369