1996年11月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol. 19, №. 6
第19卷第6期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Nov. 1996

(21) 125－130

超临界增长的拟线性方程的非平凡解的存在性*

The Existence of the Nontrivial Solutions to a Class of Quasilinear Elliptic Equations Involving Supercritical Exponents

O176.3

张兴友
Zhang Xingyou
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；28岁，男，讲师，博士)

摘 要 设 $\hat{p}(r)\geqslant 0$，$\hat{p}(r)=0(r^a)$ 当 $r\to+\infty$ 时；$\hat{p}(r)=O(r^b)$ 当 $r\to 0_+$ 时，$b\geqslant 0$，$1<p<N$，$\frac{pa}{N-1}+p-1<\gamma<\frac{N(p-1)+pb+p}{N-p}$，$m(r)\geqslant m_0>0$，则 R^N 中的拟线性方性 $-\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)+m(|x|)\cdot|u|^{p-2}u=\hat{p}(|x|)|u|^{\gamma-1}\cdot u$ 在 $W_0^{1,p}(R^N)$ 中至少存在两个非平凡经向解。

关键词 临界指数；变分方程 / P-Laplace 方程
超临界增长，拟线性方程，非平凡解，存在性
中国图书资料分类法分类号 O176.3

ABSTRACT Under the assumptions that $\hat{p}(r)=O(r^b)$ as $r\to 0_+$ and $\hat{p}(r)=O(r^b)$, $b\geqslant 0$, as $r\to 0_+$, and that $\hat{p}(r)\geqslant 0$, $1<p<N$, $m(r)\geqslant m_0>0$, $\frac{pa}{N-1}+p-1<\gamma<\frac{N(p-1)+pb+p}{N-p}$, it is proved that $-\mathrm{div}\,(|Du|^{p-2}Du)+m(|x|)\cdot|u|^{p-2}u=\hat{p}(|x|)|u|^{\gamma-1}\cdot u$ has at least two nontrivial radial solutions in $W_0^{1,p}(R^N)$.

KEYWORDS critical exponent; variational equations / p-Laplace equations

1 主要结果

本文讨论 $R^N(N\geqslant 3)$ 中方程

$$-\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)+m(|x|)\cdot|u|^{p-2}u=p(|x|)|u|^{\gamma-1}\cdot u \tag{1}$$

在 $W_0^{1,p}(R^N)$ 中非平凡解的存在性。

对(1)作如下基本假设：

$1<p<N$，$m(r)$，$p(r)\in C^a_{loc}[0,+\infty)$，这里 $a\in(0,1)$；$0\not\equiv p(r)\geqslant 0$，

$$p(r)=\begin{cases}O(r^a) & 当\ r\to+\infty\ 时\\ O(r^b) & 当\ r\to 0_+\ 时\end{cases}\quad 且\quad a\geqslant 0, b\geqslant 0 \tag{2}$$

$$\frac{ap}{N-1}+p-1<\gamma<\frac{Np}{N-p}-1+\frac{pb}{N-p} \tag{3}$$

---

* 收文日期 1996-03-15

本文的主要结果是

定理 1 在上述基本假设下，(1) 在 $W^{1,p}(R^N)$ 中至少有两个非平凡经向解 $(u|x|)$，$-u(|x|)$).

推论 若 $p(r)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，则 $\forall r\in\left(p-1,\frac{Np}{N-p}-1+\frac{pb}{N-p}\right)$，方程(1)有一对非平凡解。

自从 Brezis 和 Nirenberg[1] 讨论了 R^N 中有界区域 Ω 中的半线性方程 $-\triangle u=\lambda u+|u|^{\frac{2N}{N-2}-2}\cdot u$ 以来，有很多文献都讨论过这类半线性方程[2~4]。Guedda 和 Veron[5] 用[1]的方法结合 Pohozaev 恒等式及比较原理，朱熹平[6] 用集中列紧原理讨论了 Ω 中的拟线性方程

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)=|u|^{\frac{Np}{N-p}-2}\cdot u+f(x,u)\qquad 在\ \Omega\ 中 \tag{4}$$

的非平凡解的存在性，其中 $f(x,u)$ 为低阶扰动项。

本文的方程(1)和(4)有如下区别：首先区域为全空间 R^N，其次增长阶数 $r+1$ 可以在包含临界指数 $\frac{Np}{N-p}$ 的一个开区间里变化，亦即 r 可以大于 $\frac{Np}{N-p}$，只要(2) 中 $b>0$.

规定记号：

$B_k=\{x\in R^N; r=|x|<k\}$, $\quad E=\{u\in W^{1,p}(R^N); u(x)=u(|x|)\}$

$E_k=\{u\in W_0^{1,p}(B_k); u(x)=u(|x|)\}$，显然，$E, E_k{}^N$ 在 $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ 范数下完备。

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_{R^N}(|\nabla u|^p+m(|x|)|u|^p)\mathrm{d}x,\quad M(u)=\frac{1}{r+1}\int_{R^N}p(|x|)\cdot|u|^{r+1}\mathrm{d}x,\quad u\in E$$

$$J_k(u)=\frac{1}{p}\int_{B_k{}^N}(|\nabla u|^p+m(|x|)|u|^p)\mathrm{d}x,\quad M_k(u)=\frac{1}{r+1}\int_{B_k{}^N}p(|x|)\cdot|u|^{r+1}\mathrm{d}x,\quad u\in E_k$$

众所周知，$J(u)$ 在约束 $M(u)=1$ 下的非平凡临界点即对应于(1)的解，但由于全空间 R^N 上的 sobolev 空间的嵌入没有紧性，这给用变分法直接讨论带来了困难。笔者拟先在 B_k 上讨论 $M_k(u)=1$ 时 $J_k(u)$ 的非平凡极小值点 u_k 的存在性，然后证明 $\{u_k\}$ 有一子列 u_{k_i} 的极限 $u\neq 0$ 为(1) 的解。当然，表面上看，由于 $r+1$ 可能超过 $\frac{Np}{N-p}$，故 $W_0^{1,p}(B_k)$ 也不能紧嵌入到 $L^{r+1}(B_k)$. 不过，我们将发现，当限制在径向函数类中讨论时，$M_k(u)$ 关于 E_k 的弱拓扑是连续的(见引理 3).

2 几个引理

引理 1 存在常数 $c>0$，使得 $\forall u\in E$，都有

$$|u(r)|\leqslant C\cdot r^{\frac{1-N}{p}}\cdot\|u\|_{W^{1,p}(R^N)}\qquad(\forall r\geqslant 1) \tag{5}$$

$$|u(r)|\leqslant C\cdot r^{\frac{p-N}{p}}\cdot\|u\|_{W^{1,p}(R^N)}\qquad(\forall r>0) \tag{6}$$

证明 Berestycki 和 Lions[2] 对 $p=2$ 证明了(5)，用完全类似的方法可以证明 $p\neq 2$ 时

(5) 仍成立，即对 $u \in C_0^1(R^N) \cap E$，令 $m = \dfrac{N-1}{p}$，则 $\dfrac{d}{dr}(r^{mp} \cdot u^p) \leqslant p \cdot (r^m \cdot u)^{p-1} \cdot \dfrac{d}{dr}(u \cdot r^m)$ $\leqslant C\left\{(r^m \cdot u)^p + \left[\dfrac{d}{dr}(r^m \cdot u)\right]^p\right\}$，其中利用了 Young 不等式，将上式在 $[0,r]$ 积分，即可得 (5)。下面证明(6)，同样仅需对 $u \in C_0^1(R^N) \cap E$ 证明。设 $\mathrm{supp} u \subset B_M$，则 $\forall\, r \in (0,M)$ 有

$$|u(r)| \leqslant \int_r^M |u'(r)|dr = \int_r^M |u'(r)| \cdot r^{\frac{N-1}{p}} \cdot r^{\frac{1-N}{p}}dr$$

$$\leqslant \left(\int_r^M |u'(r)|^p \cdot r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_r^M r^{\frac{1-N}{p-1}}dr\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqslant C \cdot \| u \|_{W^{1,p}(R^N)} \cdot r^{\frac{p-N}{p}} \qquad (\text{其中要用到 } 1 < p < N, r \leqslant M). \qquad \#$$

引理 2　$J_k \in C^1(E_k, R^1)$，$M_k \in C^1(E_k, R)$ 且

$$M_k'(u) \cdot v = \int_{B_k} p(|x|)|u|^{r-1} \cdot u \cdot v dx, \qquad \forall\, u,v \in E_k \tag{7}$$

证明　显然 $J_k \in C^1(E_k, R)$。由(2)，(3)，(6) 知 M_k 在 E_k 上有明确定义。下面证明 (7)。$\forall\, u,v \in E_k$，$\forall\, t \geqslant 0$，有

$$\frac{M_k(u+tv) - M_k(u)}{t} - \int_{B_k} p(|x|)|u|^{r-1} \cdot u \cdot v dx = \int_{B_k} g(|x|,t)dx \tag{8}$$

其中

$$g(r,t) = p(r) \cdot \left[\frac{|u(r)+tv(r)|^{r+1} - |u(r)|^{r+1}}{(r+1) \cdot t} - |u(r)|^{r-1} \cdot u \cdot v\right]$$

$$= p(r) \cdot v(r)[|u(r)+\tau v(r)|^{r-1} \cdot (u(r)+\tau v(r)) - |u(r)|^{r-1} \cdot u(r)]$$

其中　　$0 \leqslant \tau \leqslant t$

故　　$\lim\limits_{t \to 0} g(|x|,t) = 0 \qquad a.e. \qquad x \in B_k$

而显然有

$$|g(r,t)| \leqslant C \cdot p(r) \cdot |v| \cdot [|u|^r + |v|^r], \quad u,v \in E_k$$

故由(2)，(6) 知，当 $0 < r \leqslant 1$ 时

$$|g(r,t)| \leqslant C \cdot r^{b+\frac{p-N}{p}(r+1)} \tag{9}$$

由(3) 知

$$b + \frac{p-N}{p}(r+1) + N - 1 > -1$$

故

$$r^{b+\frac{p-N}{p}(r+1)} \in L^1(B_k)$$

故由控制收敛定理知 $\lim\limits_{t \to 0}\int_{E_k} g(|x|,t)dx = 0$，即(7) 成立。

下面证明 $M_k \in C^1(E_k, R^1)$，即若 $u_n \to u_0(E)$，则 $M_k'(u_n)$ 依 $(E_k)^*$ 模收敛到 $M_k'(u_0)$。

显然若 u_n 依 E 模收敛到 u_0，则 $u_n \to u_0$，$a.e.\ B_k$。

于是

$$p(|x|) \cdot (|u_n|^{r-1} \cdot u_n - |u|^{r-1} \cdot u) \to 0 \quad a.e.\ B_k$$

假设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\|v\|_{E_k}\leqslant 1}\int_{B_k} |p(r)\cdot[|u_n|^{r-1}\cdot u_n\cdot v - |u_0|^{r-1}\cdot u\cdot v]\mathrm{d}x = c > 0 \tag{10}$$

则存在子列 $u_{n_i}\in E_k$ s. t.

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{\|v\|_{E_k}\leqslant 1}\int_{B_k} |p(r)\cdot[|u_{n_i}|^{r-1}\cdot u_{n_i}\cdot v - |u_0|^{r-1}\cdot u_0\cdot v]\mathrm{d}x = c > 0$$

故当 i 充分大有

$$\frac{1}{2}c \leqslant \sup_{\|v\|_{E_k}\leqslant 1}\int_{B_k} |p(r)\cdot[|u_{n_i}|^{r-1}\cdot u_{n_i}\cdot v - |u_0|^{r-1}\cdot u_0\cdot v]\mathrm{d}x \leqslant 2c$$

故 $\exists\, v_{n_i}\in E_k$，$\|v_{n_i}\|\leqslant 1$ s. t.

$$\frac{1}{3}c \leqslant \int_{B_k} |p(r)\cdot[|u_{n_i}|^{r-1}\cdot u_{n_i}\cdot v_{n_i} - |u_0|^{r-1}\cdot u_0\cdot v_{n_i}]\mathrm{d}x \leqslant 3c \tag{11}$$

由 $\{v_{n_i}\}\subset E_k$ 有界，知其有子列（仍记为 v_{n_i}）依 E_k 弱拓扑收敛到某个 $v_0\in E_k$，$\|v_0\|_{E_k}\leqslant 1$. 于是(11) 中被积函数 $a.e.$ 收敛到 0，而(11) 中被积函数同样有估计式(9). 故由控制收敛定理知 $c=0$，因此假设(10) 不成立，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\|v\|_{E_k}\leqslant 1}\int_{B_k} |p(r)\cdot[|u_n|^{r-1}\cdot u_n\cdot v - |u_0|^{r-1}\cdot u_0\cdot v]\mathrm{d}x = 0$$

这即是 $\|M_k'(u_n) - M_k'(u_0)\|_{(E_k)^*}\to 0$ （当 $n\to+\infty$） #

引理 3 M_k 关于 E_k 的弱拓扑连续。

证明 设 $\{u_n\}\subset E_k$ 弱收敛到 $u\in E_k$，则显然 u_n $a.e.$ 收敛到 u，而

$$|M_k(u_n) - M_k(u)| \leqslant \frac{1}{r+1}\int_{B_k} p(r)\cdot||u_n|^{r+1} - |u|^{r+1}|\mathrm{d}x.$$

对此被积函数同样有估计式(9)，故由控制收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}|M_k(u_n) - M_k(u)| = 0$ #

引理 4 设 $a_0>0$ 为任一给定常数，$u_k\in E_k$，$\forall\, k\in N$，且 $\|u_k\|_{W^{1,p}(R^N)}\leqslant C(\forall\, k\in N)$，满足

$$\int_0^k r^{N-1}\cdot|u_k|^p\cdot(p(r)\cdot|u_k|^{r+1-p} - a_0)\mathrm{d}r > 0 \qquad \forall\, k\in N \tag{12}$$

则 $\exists\,\delta>0$，$\exists\, M>0$ 及 $\{r_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $0<r_{k_i}\leqslant M$，且 $u_{k_i}(r_{k_i})\geqslant\delta>0$.

证明 由 $\|u_k\|_{W^{1,p}(R^N)}\leqslant C$ 及(5) 知 $|u_k(r)|\leqslant C\cdot r^{\frac{1-N}{p}}(r\geqslant 1)$，其中 C 与 u_k 无关。于是由(2) 知 $\exists\, M_1>0$，当 $r\geqslant M_1$ 时有 $p(r)\cdot|u_k|^{r+1-p}\leqslant C_0\cdot r^{a+\frac{1-N}{p}(r+1-p)}$，由(3) 知 $a+\frac{1-N}{p}(r+1-p)<0$，故 $\exists\, M_2>0$，当 $r\geqslant M_2$ 时 $C_0\cdot r^{a+\frac{1-N}{p}(r+1-p)} - a_0<0$，故当 $k\geqslant M_2$ 时有

$$\int_{M_2}^k r^{N-1}|u_k|^p\cdot(p(r)\cdot|u_k|^{r+1-p} - a_0)\mathrm{d}r \leqslant \int_{M_2}^k r^{N-1}|u_k|^p\cdot(C_0 r^{a+\frac{1-N}{p}(r+1-p)} - a_0)\mathrm{d}r \leqslant 0 \tag{13}$$

假设 $\forall\,\delta>0$，都 $\exists\, K_1$，当 $k\geqslant K_1$ 时有

$$|u_k(r)|\leqslant\delta \qquad \forall\, r\in(0,M_2] \tag{14}$$

则由 $r+1-p>0$ 及 $p(r)$ 在 $[0,M_2]$ 上有界，可取 $\delta>0$ 充分小，使得 $p(r)\cdot\delta^{r+1-p}-a_0\leqslant 0,\forall\, r\in(0,M_2]$. 于是当 $k\geqslant K_1$ 时

$$\int_0^{M_2} r^{N-1}|u_k|^p\cdot(p(r)\cdot|u_k|^{r+1-p}-a_0)\mathrm{d}r\leqslant\int_0^{M_2} r^{N-1}|u_k|^p\cdot(p(r)\delta^{r+1-p}-a_0)\mathrm{d}r\leqslant 0 \quad (15)$$

于是由(13)，(15) 知，当 $k\geqslant\max(M_2,K_1)$ 时有

$$\int_0^k r^{N-1}|u_k|^p\cdot(p(r)\cdot|u_k|^{r+1-p}-a_0)\mathrm{d}r\leqslant 0$$

与(12) 矛盾！故假设(14) 不成立，引理得证。

3　定理证明

记 $\mu_k=\inf\{J_k(u);u\in E_k,M_k(u)=1\},k\in N$. 设 $\{u_{k,n}\}\subset E_k$ 满足 $M_k(u_{k,n})=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}J_k(u_{k,n})=\mu_k$，则显然 $\{u_{k,n}\}\subset E_k$ 为有界集，故有子列 $u_{k,n_i}\to u_k(E_k)$，则 $J_k(u_k)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}J_k(u_{k,n_i})=\mu_k$，且由引理 3 知 $M_k(u_k)=1$. 故 $u_k\not\equiv 0$ 达到 $J_k(u)$ 的下确界 μ_k，故 $\exists\ \lambda_k\in R^1$ 使得

$$\int_{B_k}(|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k\cdot\nabla v+m(|x|)|u_k||u_k|^{p-2}u_kv)\mathrm{d}x$$

$$=\lambda_k\int_{B_k}p(|x|)|u_k|^{r-1}u_kv\mathrm{d}x,\quad\forall\ v\in E_k \quad (16)$$

取 $v=u_k$ 即知 $\lambda_k>0$.

由 $E_{k-1}\subset E_k$ 知 $\mu_k\leqslant\mu_{k-1}$，故 $\mu_k\leqslant\mu_1(\forall\ k\in N)$，因此 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E$ 为有界集，且由

$$(r+1)\lambda_k=(r+1)\lambda_kM_k(u_k)=\lambda_k\int_{B_k}p(|x|)|u_k|^{r+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{B_k}(|\nabla u_k|)|^p+m(|x|)|u_k|^p\mathrm{d}x=p\cdot\mu_k \quad (17)$$

知 $0<\lambda_k\leqslant\lambda_{k-1}\leqslant\lambda_1,\quad(\forall\ k\in N)$.

将 u_k 在 B_k 外作零延拓，则由(16) 知在分布意义下有

$$-\operatorname{div}(|Du_k|^{p-2}Du_k)+m(|x|)\cdot|u_k|^{p-2}\cdot u_k=\lambda_kp(|x|)|u_k|^{r-1}\cdot u_k\qquad\text{在 } R^N \text{ 中} \quad (18)$$

于是由 Guedda[5] 的论证知 $\forall\ l\geqslant 1$，都存在 $C_l>0$ 及 $\alpha\in(0,1)$ s. t.

$$\|u_k\|_{C^{1,\alpha}(\bar{B}_l)}\leqslant C_l\qquad(\forall\ k\in N)$$

因此有子列依 $C^{1,\alpha'}(\bar{B}_l)(\forall\ \alpha'\in(0,\alpha))$ 收敛到某个函数 $u\in C^{1,\alpha'}(B_l)$. 取 l 为自然数，然后令 $l\to+\infty$，则由标准的对角线法则，知有子列(仍记为)u_{k_i} 在 R^N 中收敛到 u，∇u_{k_i} 在 R^N 中收敛到 ∇u，且在任意有界集 B_M 上 $u_{k_i},\nabla u_{k_i}$ 一致收敛到 $u,\nabla u$. 因此有

$$\int_{R^N}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v+m(|x|)|u|^{p-2}u\cdot v)\mathrm{d}x$$

$$= \lambda \int_{R^N} p(|x|)|u|^{r-1}u \cdot v\mathrm{d}x, \quad \forall v \in E \tag{19}$$

其中 $\lambda = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$,(由(17)式后的说明知$\lim_{k\to\infty}\lambda_k$存在)。事实上,在(18)式的弱形式中取检验函数 $v \in E \cap C_0^\infty(R^N)$,令 $k \to \infty$,即知(19)式对 $v \in E \cap C_0^\infty(R^N)$ 成立,再由标准的稠密性论证。即知(19)式成立,也即是在分布意义下

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) + m(|x|) \cdot |u|^{p-2} \cdot u = \lambda \cdot p(|x|)|u|^{r-1} \cdot u \qquad \text{在 } R^N \text{ 中} \tag{20}$$

下面证明 $u \not\equiv 0$.

由(17)知

$$\int_{B_k}\left(p(r)|u_k|^{r+1} - \frac{m}{\lambda_k}|u_k|^p\right)\mathrm{d}x > 0$$

而 $\lambda_k = \frac{p \cdot \mu_1}{r+1} \leqslant \frac{p\mu_1}{\lambda+1}$

而 $m \geqslant m_0 > 0$

故 $\int_0^k r^{N-1} \cdot |u_k|^p \cdot \left(p(r)|u_k| r + 1 - p - \frac{m_0(p+1)}{p \cdot \mu_1}\right)\mathrm{d}r > 0 \qquad \forall k \in N$

于是由引理 4 知 $\exists\ \delta > 0$,$\exists\ M > 0$ 及子列$\{r_{k_i}\}$ 使得

$$0 < r_{k_i} \leqslant M, |u_{k_i}(r_{k_i})| \geqslant \delta > 0$$

于是由 $u_{k_i}(r)$ 在$[0,M]$上一致收敛到 u 知 $u \not\equiv 0$,(否则,若 $u \equiv 0$,则

$$\max_{r\in[0,M]}|u_{k_i}(r) - u(r)| = \max_{r\in[0,M]}|u_{k_i}(r)| \geqslant \delta,$$

这与 u_{k_i} 一致收敛矛盾!)

由 $u \not\equiv 0$,在(19)中令 $v = u$ 即知 $\lambda > 0$,于是 $\bar{v} = \lambda^{\frac{1}{r+1-p}} \cdot u$ 即是方程(1)的非平凡径向解。显然 $-\bar{v}$ 也是(1)的解。至此定理证毕。 #

参 考 文 献

1 Brezis H, Lions P L. Positive solutions of nonlinear elliptic eqs involving critical sobolev exponents. Comm pure Appl Math, 1983, 36(4): 437～477

2 Berestycki H, Lions P L. Nonlinear scalar field equations. Arch Ration Mech Anal, 1983, 82(3): 313～375

3 Noussair E S, Swanson C A. Positive solutions of semilinear elliptic problems in unbounded domains. J Diff Eqs, 1985, 57(2): 349～372

4 Noussair E S, Swanson C A. Ground states for transcritical semilinear elliptic eqs in R^N. In: WAAIAA. Singapore: World Scientific, 1992. 471～477

5 Guedda M, Veron L. Quasilinear elliptic equationsinvolving critical sobolev exponents. Nonlinear Anal TMA, 1989, 13(8): 879～902

6 朱熹平. 临界增长拟线性椭圆型方程的非平凡解. 中国科学, A 辑, 1988, (3): 225～237

7 Benedetto E Di. $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate equations. Nonlinear Anal TMA, 1983, 7(8): 827～850