1996 年 11 月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期 Journal of Chongqing University (Natural Science Edition) Nov. 1996

(22) 131—134

关于鞍函数的一个 minimax 定理*

A Minimax Theorem about Saddle Functional

O177·91

叶仲泉
Ye Zhongquan
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；35 岁，男，讲师，博士)

摘　要　利用 Ekeland 变分原理和 P. S. 条件证明了一个 minimax 定理，可以认为它是 Manasevich 定理的改进。

关键词　变分原理；鞍点；极大极小定理 / P. S. 条件(DEDS)　鞍函数
中国图书资料分类法分类号　O177. 91

ABSTRACT　A minimax theorem is proved by taking advantage of Ekeland's variational principle and the P. S. condition. This theorem can be regarded as an improvement of the theorem due to Manasevich.

KEYWORDS　variational principles; saddle points; minimax theorem / P. S. condition (DEDS)

1　关于 Ekeland 变分原理的基本结果

Ekeland 变分原理[2]被认为是近二十多年来非线性分析中最有力的工具之一，它已在非线性分析、凸分析、广义微积分、优化理论、不动点类理论、大范围分析等许多方面得到了应用。

Ekeland 变分原理是一条"近似极值存在定理"，它的最一般的陈述如下：

定理 1(Ekeland **变分原理**[2])　设 V 是完备距离空间，$F:V\to R\cup\{+\infty\}$ 为下有界下半连续函数，且 $\not\equiv+\infty$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，点 $u\in V$ 满足：

$$\inf_V F\leqslant F(u)\leqslant\inf_V F+\varepsilon \tag{1}$$

又设 $\lambda>0$，则存在某个点 $v\in V$，使得

$$F(v)\leqslant F(u),d(u,v)\leqslant\lambda$$
$$\forall\, w\neq v, F(w)>F(v)-(\varepsilon/\lambda)d(v,w) \tag{2}$$

本文主要要用到它的一个推论：

定理 2　设 F 是 Banach 空间 V 上的有下界的下半连续的 Gateaux 可微函数，且满足如下的 P. S. 条件：

对任何满足 $F'(u_n)\to 0$ 和 $F(u_n)$ 有界的 $\{u_n\}$ 都存在聚点。

---

* 收文日期　1996004-20

则存在 $v \in V$，使 $F(v) = \inf\limits_{u \in V} F(u)$ 且 $F'(v) = 0$.

此定理的证明请参见[3].

2 主要结果

本文的目的就是利用 Ekeland 变化原理的一个推论（即定理 2）将[1]中的定理加以改进。[1]中的结论陈述如下：

定理 3[1] 设 H 是实 Hilbert 空间，$H = X \oplus Y$，其中 X, Y 是 H 的两个闭子空间，$f \in C^2(H, R)$，又设存在两个不增连续函数 $\alpha: [0, \infty) \to (0, \infty)$，$\beta: [0, \infty) \to (0, \infty)$，使

$$\int_1^\infty \alpha(s)\mathrm{d}s = \infty \qquad \int_1^\infty \beta(s)\mathrm{d}s = \infty \tag{3}$$

$$\forall x \in X, y \in Y, \forall k \in Y$$
$$(D^2 f(x+y)k, k) \geqslant \alpha(\|y\|)\|k\|^2 \tag{4}$$

$$\forall x \in X, y \in Y, \forall h \in Y$$
$$(D^2 f(x+y)h, h) \leqslant -\beta(\|x\|)\|h\|^2 \tag{5}$$

则

a) 存在唯一的 $v_0 \in H$，使 $\nabla f(v_0) = 0$

b) $f(v_0) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x+y) = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} f(x+y)$

笔者将把此定理改进如下：

定理 4 设 H 是实 Hilbert 空间，$H = X \oplus Y$，其中 X, Y 是 H 的两个正交闭子空间，$f \in C^2(H, R)$，f 有上界且满足 P.S. 条件，设有不增连续函数 $\alpha: [0, \infty) \to (0, \infty)$，使

$$\int_1^\infty \alpha(s)\mathrm{d}s = \infty \tag{6}$$

$$\forall x \in X, y \in Y, \forall k \in Y$$
$$(D^2 f(x+y)k, k) \geqslant \alpha(\|y\|)\|k\|^2 \tag{7}$$

且

$$\forall y \in Y, \forall h_1, h_2 \in X$$
$$(\nabla f(h_1 + y) - \nabla f(h_2 + y), h_1 - h_2) \leqslant 0 \tag{8}$$

则存在 $v_0 \in H$，使 $\nabla f(v_0) = 0$，且

$$f(v_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x+y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x+y)$$

为了证明此定理，要用到如下的两个命题：

命题 1[4] 设 H 为一实 Hilbert 空间，L 是 H 上的有界线性算子，设

$$\forall x \in H, (Lx, x) \geqslant a\|x\|^2 \tag{9}$$

其中 a 为一正常数，则 L 为 H 上的同构，且 $\|L^{-1}\| \leqslant a^{-1}$.

命题 2[5] 设 H 为一实 Hilbert 空间，$T: H \to H$ 为 C^1 映象。设 $\gamma: [0, \infty) \to (0, \infty)$ 是连

续不增函数，满足：

$$\int_1^{\infty}\gamma(s)\mathrm{d}s=\infty$$

$$(T'(y)k,k)\geqslant\gamma(\|y\|)\|k\|^2\qquad\forall y\in H,k\in H$$

则 T 是 C^1 微分同胚。

定理 4 的证明

由(7)式，显然有：$\forall x\in x,f(x+y)$ 是 y 的凸泛函。

由(8)式，显然有：$\forall y\in x,f(x+y)$ 是 x 的凹泛函。

$\therefore J(x,y)=f(x+y)$ 是凹—凸鞍泛函

a) 对每一个 $x\in X$，设 $g_x:Y\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$g_x(y)=f(x+y)$ 于是 $g_x\in C^2(Y,\boldsymbol{R})$，且对 $k\in Y$

$$(\nabla g_x(y),k)=(\nabla f(x+y),k)\tag{10}$$

由(7)式

$$(D^2g(y)k,k)=(D^2f(x+y)k,k)\geqslant\alpha(\|y\|)\|k\|^2\tag{11}$$

于是由命题 2，∇g_x 是 C^1 同胚（从 Y 到 X），因此，对每一 $x\in X$，存在唯一的 $y_x\in Y$，使 $\nabla g_x(y_x)=0$. 定义 $\varphi:X\to Y$ 为 $y_x=\varphi(x)$，于是 $\nabla g_x(\varphi(x))=0$，应要求 $\varphi\in C^1(x,y)$，为此，设 P 表 H 到 Y 的正交投影，容易看出

$$y=\varphi(x)\quad\text{当且仅当 } P\nabla f(x+y)=0\tag{12}$$

定义 $E:X\times Y\to Y$ 为

$$E(x,y)=P\nabla f(x+y)\tag{13}$$

那么 E 是属于 C^1 类的，且对任意一对满足 $E(x_0,y_0)=0$ 的 x_0,y_0 马上得 $y_0=\varphi(x_0)$. 令 E_y 表 E 关于 y 的偏导数，设 $k\in Y$，有

$$E_y(x_0,y_0)k=PD^2f(x_0,y_0)k\tag{14}$$

显然，$E_y(x_0,y_0):Y\to y$ 是有界线性映象，从(7)式和(14)式

$$(E_y(x_0,y_0)k,k)=(D^2f(x_0+y_0)k,k)\geqslant\alpha(\|y_0\|)\|k\|^2\tag{15}$$

对 $\forall k\in Y$. 由命题 1，$E_y(x_0,y_0)$ 是 Y 到 Y 的同构，根据隐函数定理，存在一 C^1 映象 $\tilde{\varphi}:U\to Y$，U 为 x_0 的某一邻域，使 $E(x,\hat{\varphi}(x))=0$ 对所有的 $x\in V$. 又从(12)式知 $\forall x\in V,\hat{\varphi}(x)=\varphi(x)$，由 x_0 的任意性知 $\hat{\varphi}(x)$ 可定义在整个 X 上。这样就得 $\varphi\in C^1(X,Y)$.

令 $G:x\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$$G(x)=f(x+\varphi(x))\tag{16}$$

由于 φ 是 C^1 的，所以 G 也是 C^1 的，且按链锁法则有 $\forall h\in X$.

$$(\nabla G(x),h)=(\nabla f(x+\varphi(x)),h+\varphi'(x)h)\tag{17}$$

从(12)式，$\forall k\in Y$

$$(\nabla f(x+\varphi(x)),k)=0\tag{18}$$

既然 $\varphi'(x)h\in Y$，故得：

$$(\nabla G(x),h)=(\nabla f(x+\varphi(x)),h)\tag{19}$$

又：$\forall x_1,x_2\in X$，有

$$\begin{aligned}G(x_1)-G(x_2)&=f(x_1+\varphi(x_1))-f(x_2+\varphi(x_2))\\&=[f(x_1+\varphi(x_1))-f(x_2+\varphi(x_1))]+[f(x_2+\varphi(x_1))-f(x_2+\varphi(x_2))]\end{aligned}$$

$$\geqslant (\nabla f(x_1 + \varphi(x_1)), x_1 - x_2) + (\nabla f(x_2 + \varphi(x_2)), \varphi(x_1) - \varphi(x_2))$$
$$= (\nabla f(x_1 + \varphi(x_1)), x_1 - x_2)$$

∴ 由(19)式得：

$$G(x_1) - G(x_2) \geqslant (\nabla G(x_1), x_1 - x_2) \tag{20}$$

因此 $G(x) = f(x + \varphi(x))$ 是 C^1 凹泛函。于是 $-G(x)$ 是 C^1 凸泛函且有下界，当然是下半连续的。

要 $G(x)$ 满足 P.S. 条件，这一点可证明如下：

设序列 $\{x_n\}$ 满足 $G'(x_n) \to 0$ 和 $\{G(x_n)\}$ 有界，证 $\{x_n\}$ 有收敛的子列。

由 $\{G(x_n)\}$ 有界，即 $\{f(x_n + \varphi(x_n))\}$ 有界。

由 $G'(x_n) \to 0$，即 $\| G'(x_n) \| = \sup\limits_{\|h\|=1} (G'(x_n), h) \to 0 (n \to \infty)$

$$\because \quad \| \nabla f(x_n + \varphi(x_n)) \| = \sup_{\|h+k\|=1} (\nabla f(x_n + \varphi(x_n)), h + k) \qquad (h \in X, k \in Y - f)$$
$$= \sup_{\|h+k\|=1} (\nabla f(x_n + \varphi(x_n)), h)$$
$$= \sup_{\|h+k\|=1} (\nabla G(x_n), h) = \sup_{\|h\|=1} (\nabla G(x_n + \varphi(x_n), h) \qquad (n \to \infty)$$

于是得 $\nabla f(x_n + \varphi(x_n)) \to 0$，而 $\{f(x_n + \varphi(x_n))\}$ 有界，所以由 f 满足 P.S. 条件知存在 $\{x_n + \varphi(x_n)\}$ 的子列 $\{x_k + \varphi(x_k)\}$，使此子列收敛于某点 $x_0 + y_0$ 即

$$x_k + \varphi(x_k) \to x_0 + y_0$$
$$\therefore \quad x_k \to x_0$$

这就证明了 $G(x)$ 满足 P.S. 条件，当然 $-G(x)$ 亦满足 P.S. 条件。

于是由定理 2 知存在 $x_0 \in x$，使 $\nabla G(x_0) = 0$，即 $\forall h \in X$ 有 $(\nabla G(x_0), h) = (\nabla f(x_0 + \varphi(x_0)), h) = 0$.

但由(18)知 $\forall k \in Y$，$(\nabla f(x_0 + \varphi(x_0)), k) = 0$

∴ $\forall h \in X, k \in Y$ 有

$$(\nabla f(x_0 + \varphi(x_0), h + k) = 0$$

令 $v_0 = x_0 + \varphi(x_0)$　即得　$\nabla f(v_0) = 0$.

b) 由[6]中的定理即得：

$$f(v_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x + y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x + y)$$

参 考 文 献

1 Manasevich P F. a minimax theorm. J. Math. Anal. Appl. 1982, 90: 64～71

2 Ekeland I. On the variational principles. J. Math. Anal. Appl. 1974, 47: 324～353

3 Ekeland I. Nonconvex minimization problems. Bull Am. Math. Soc. (New Series), 1979, 1(3): 443～474

4 Schwartz J T. Nonlinear Functional Analysis, Gordon & Breach, New York, 1969. 1

5 Radulescu M. Global inversion theorems and applications to differential equations, Nonlinear Analysis, 1985, 4, 951～965

6 Ekeland I, Teman R. Convex Analysis and Variational Prolems, North-Holland. 1976, Amsterdam