1996 年 11 月　　重庆大学学报（自然科学版）　　Vol. 19, №. 6
第 19 卷第 6 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Nov. 1996

(24) 141－144

亚纯函数微分多项式的例外集*

The Exceptional Set of Differential Polynomials of Meromorphic Functions

O174.52

漆　毅
Qi Yi
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；32 岁，男，讲师，博士生）

摘　要　在考虑例外集的情形下，证明了相应于微分多项式 $f'-af^n$ 的奇异方向的存在性。

关键词　整函数 / 亚纯函数；函数的级；Polya 峰　　微分多项式，例外集
中国图书资料分类法分类号　O174.52

ABSTRACT　We prove the existence of the singular direction related to differential polynomial $f'-af^n$ with concerning exceptional set.

KEYWORDS　entire functions / meromorphic function; order of function; Polya peak

0　引　言

龚向宏（参见[1]）证明了

定理 A　设 $f(Z)$ 为开平面上的 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级亚纯（整）函数，则存在一条由原点出发的半直线 $\triangle$：$\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使得对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ n\in N$ 且 $n\geqslant 5(n\geqslant 3)$ 以及 $\forall\ a$，$b\in C\backslash\{0\}(a\in C\backslash\{0\}, b\in C)$ 均有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f'-af^n=b)}{\log r}=\lambda$$

笔者证明相应于定理 A 的例外集的存在性，即在考虑例外集的情形下，上述定理仍成立。

设 $\sigma\in R^+$，(a_n) 为满足 $|a_{n+1}|>|a_n|^{1+\sigma}$ 的复数列，(ε_n) 为正的无穷小数列，记

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(|z-a_n|<\varepsilon_n|a_n|$$

笔者的主要结果

定理 1　设 E 如上定义。则对任意的 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级整（以 ∞ 为 Nevanlinna 亏值的亚纯）函数，均存在一条由原点出发的半直线 $\triangle$：$\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使得对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ n\in N$ 且 $n\geqslant 3(n\geqslant 5)$ 以及 $\forall\ a,b\in C$ 且 $a\neq 0(a,b\in C\backslash\{0\})$ 均有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\{S(r,\theta_0,\varepsilon)\backslash E,f'-af^n=b\}}{\log r}=\lambda \tag{1}$$

* 收文日期　1996-04-10

其中 $S(r,\theta_0,\varepsilon)=(z;|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon)\cap(|z|\leqslant r)$

笔者所使用的记号，均为值分布论中常用记号[2]。

1 定理证明所需引理

为了证明定理 1，需如下引理

引理 1 设 $f(z)$ 为开平面上的 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级亚纯函数，则对 $\forall\ \eta:0<\eta<1,\forall\ b\in C\backslash\{0\},\forall\ n\in N$ 且 $n\geqslant 5$ 均存在一个仅与 f,n,b 有关的正数 $R(>1)$，使得当 $|z_0|>R$ 时，存在点 z^*，对 $\forall\ a\in C$ 均有

$$n\left(\frac{\eta|z_0|}{32},z_0,f=a\right)<K\left\{N\log\frac{2}{\eta}+\log^+|z_0|+\log^+|b|+\log^+\frac{1}{|b|}+\log\frac{1}{|f(z^*),a|}\right\}\tag{2}$$

其中 $N=n(\eta|z_0|,z_0,f'-f^n-b=0)+1$

［注］：从引理 1 的证明[1]过程可看出，$f(z)$ 为整函数时，有类似结果。事实上，文献[1]中证明引理 1(即文献[3]中引理 4.8)时，应用了该文献中引理 3.2 的(3.102)式，对整函数的情形，改用引理 3.2 的(3.103)式即可。此时，引理 1 中的 n，只须 $n\geqslant 3$.

2 定理 1 的证明

由于
$$f'-af^n=a^{-\frac{1}{n-1}}\left[\left(a^{\frac{1}{n-1}}f\right)'-\left(a^{\frac{1}{n-1}}f\right)^n\right].$$
所以，笔者只须对 $a=1$ 的情形加以证明。

2.1 亚纯函数时的证明

取定 $\delta(0<\delta<1)$ 满足

$$24\delta^{\lambda}<1\quad 和\quad \frac{24\log\frac{1}{\delta}(2\delta)^{\lambda}}{\log 2}<1$$

设 (r_n) 为满足[3]中引理的一个 λ 级 Polya 峰序列。下面区分两种情形。

Ⅰ 存在 (r_n) 的子序列 (r_{n_j}) 使得

$$\left\{\frac{\delta}{2}r_{n_j}\leqslant|z|\leqslant(1+\sigma)r_{n_j}\right\}\cap E=\varnothing\tag{3}$$

[4] 证明了，当 j 充分大时，对每个 j 均存在 $z_j\in(\delta r_{n_j}\leqslant|z|\leqslant r_{n_j})$ 使得对 $\forall\ a\in C$

$$n(\Gamma_j,f=a)>r_{n_j}^{\lambda-\varepsilon_j}\tag{4}$$

最多除去两个球面半径为 $e^{-n(\Gamma_j,f=\infty)}$ 的球面圆 $S_j^{(1)},S_j^{(2)}$ 中的复数。其中 $\varepsilon_j\to 0(j\to\infty)$，$\Gamma_j=(|z-z_j|<\frac{4\pi}{\log r_{n_j}}|z_j|)$.

取 θ_0 为 $(\arg z_j)$ 的一个聚点，那么笔者断言：$\triangle:\arg z=\theta_0$ 即满足定理 1 的半直线。若不然，即存在 $\varepsilon_0>0,n_0\in N^+$ 且 $n_0\geqslant 5,b\in C\backslash\{0\}$，使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\{S(r,\theta_0,\varepsilon_0)\backslash E,f'-af^n=b)}{\log r}<\tau<\lambda\tag{5}$$

由于 $z_j\in(\delta r_{n_j}\leqslant|z|\leqslant r_{n_j})$ 及(3)知

$$\left\{ |z - z_j| < \frac{\delta}{4}|z_j| \right\} \cap E = \varnothing$$

由 θ_0 的定义，不妨设 $\arg z_j \to \theta_0 (j \to \infty)$，则存在 $\eta: 0 < \eta < \frac{\delta}{4} < 1$，使得

$$(|z - z_j| < \eta|z_j|) \subset (|\arg z - \theta_0| < \varepsilon_0 \qquad (j \text{ 充分大时})$$

且

$$(|z - z_j| < \eta|z_j|) \cap E = \varnothing$$

由以上二式及(5) 知，当 j 充分大时

$$n(\eta|z_j|, z_j, f' - f^n - b = 0) < (1 + \delta)^{\tau} r_{m_j}^{\tau}$$

设 $R > 1$ 为引理 1 中的正数，应用引理 1，当 j 充分大时，对 $\forall a \in C$ 均有

$$n(\Gamma_j, f = a) < n\left(\frac{\eta}{32}|z_j|, z_j, f = a \right)$$

$$< K\left\{ (1 + \delta)^{\tau} r_{m_j}^{\tau} \log \frac{2}{\eta} + \log^+ |z_j| + \log^+ |b| + \log^+ \frac{1}{|b|} + \log \frac{1}{|f(z^*), a|} \right\}$$

故当 j 充分大时，对 $\forall a \in C$ 恒有

$$n(\Gamma_j, f = a) < r_{m_j}^{\tau_1} \qquad (\tau < \tau_1 < \lambda) \tag{6}$$

最多除去一个球面半径为 $e^{-r_{m_j}^{\tau}}$ 的球面圆 $S_j^{(3)}$.

由(4)、(6) 知，j 充分大时　　$r_{m_j}^{\lambda - \varepsilon_j'} < r_{m_j}^{\tau_1}$

从而 $\lambda \leqslant \tau_1$，矛盾。这便证明了笔者的断言。

Ⅰ　对 Polya 峰序列 (r_m) 有

$$\left\{ \frac{\delta}{4} r_m \leqslant |z| \leqslant (1 + \delta) r_m \right\} \cap E \neq \varnothing$$

进一步假设

$$(|z - a_{n_m}| < \varepsilon_{n_m} |a_{n_m}|) \cap \left\{ \frac{\delta}{2} r_m \leqslant |z| \leqslant (1 + \delta) r_m \right\} \neq \varnothing \qquad m \geqslant m_0 \tag{7}$$

文献[4] 中证明了：当 m 充分大时，对每个 m 均存在 $z_m \in \left\{ 4|a_{n_m - 1}| \leqslant |z| \leqslant \frac{\delta}{4} r_m \right\}$，使得对 $\forall a \in C$ 均有

$$n(\Gamma_m, f = a) > \Gamma_m^{\lambda - \varepsilon_m'} \tag{8}$$

最多除去两个球面半径为 $e^{-n(\Gamma_m, f = a)}$ 的球面圆 $S_m^{(1)}, S_m^{(2)}$，其中 $\Gamma_m = \left\{ |z - z_m| < \frac{4\pi}{\log r_m} |z_m| \right\}$，$\varepsilon_m' \to 0 (m \to \infty)$.

取 θ_0 为 $(\arg z_m)$ 之聚点，则 $\triangle: \arg z = \theta_0$ 即满足定理 1.

若不然，即存在 $\varepsilon_0 > 0$，$n_0 \in N^+$ 且 $n_0 \geqslant 5$，$b \in C \backslash \{0\}$，使得

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n\{S(r, \theta_0, \varepsilon_0) \backslash E, f' - f^n = b\}}{\log r} < \tau < \lambda \tag{9}$$

由 $\delta: 0 < \delta < 1$，$z_m \in \left\{ 4|a_{n_m - 1}| \leqslant |z| \leqslant \frac{\delta}{4} r_m \right\}$ 知，当 m 充分大时

$$\left\{ |z - z_m| < \frac{\delta}{24} |z_m| \right\} \subset \left\{ 2|a_{n_m - 1}| \leqslant |z| \leqslant \frac{\delta}{3} r_m \right\}$$

又易证明

$$\left\{ (2|a_{n_m - 1}| \leqslant |z| \leqslant \frac{\delta}{3} r_m \right\} \cap E = \varnothing$$

从而

$$\left\{ |z - z_m| < \frac{\delta}{24} |z_m| \right\} \cap E = \varnothing \tag{10}$$

由 θ_0 的定义，不妨设 $\arg z_m \to \theta_0(m \to \infty)$，则存在 $\eta: 0 < \eta < \frac{\delta}{24} < 1$，使得

$$(|z - z_m| < \eta|z_m|) \subset (|\arg z - \theta_0| < \varepsilon_0)$$

且由(10) 式

$$(|z - z_m| < \eta|z_m|) \cap E = \varnothing$$

以下的讨论与 I 完全一样，略去。

综合 I，II 知，定理 1 对以 ∞ 为 Nevanlinna 亏值的 $\lambda(0 < \lambda < +\infty)$ 级亚纯函数成立。

2.2 整函数时的证明

类似 2.1 中之证明，只须将其中应用引理 1 的地方改为应用其[注]，同样可得整函数情形、$b \neq 0$ 时定理 1 的证明，即存在一条由原点出发的半直线 $\triangle: \arg z = \theta_0(0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi)$，使得对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\forall\, n \in N$ 且 $n \geqslant 3$ 及 $\forall\, a, b \in C\backslash\{0\}$ 均有(1) 成立。

笔者断言，就上述方向，当 $b = 0$ 时(1) 仍成立。

若不然，假设存在 $\varepsilon_0 > 0$，$n_0 \in N$ 且 $n_0 \geqslant 3$，使得

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log n(S(r, \theta_0, \varepsilon_0)\backslash E, f' - f^{n_0} = 0)}{\log r} < \tau < \lambda \tag{11}$$

令

$$g = -\frac{1}{(n_0 - 1)f^{n_0 - 1}}$$

显然 g 的级仍为 λ，$\triangle: \arg z_0 = \theta_0$ 仍为其一条 λ 级 Borel 方向。相应于 2.1，分两种情形。

情形 I 在此情形下，$\Gamma_j = \left\{ |z - z_j| < \frac{4\pi}{\log r_{m_j}}|z_j| \right\}$ 仍为 g 之充满圆，且对 $\forall\, a \in C$，均有

$$n(\Gamma_j, g = a) > (n_0 - 1)r_{m_j}^{\lambda - \varepsilon_j'} \tag{12}$$

最多除去两个球面半径为 $e^{-n(\Gamma_j, g=\infty)}$ 的球面圆 $S_j^{(1)}, S_j^{(2)}$，其中 $\varepsilon_j' \to 0(j \to \infty)$。

由于 $32\Gamma_j \cap E = \varnothing$，易证存在$(32\Gamma_j)$ 的一子圆列，不妨设为其本身，当 j 充分大时

$$32\Gamma_j \subset S(1 + \delta)r_{m_j}, \theta_0, \varepsilon_0)\backslash E$$

从而由(11) 知，当 j 充分大时

$$n(32\Gamma_j, f' - f^{n_0} = 0) < (1 + \delta)^\tau r_{m_j}^\tau$$

又 $g \neq 0$，且 $g' = 1 \Leftrightarrow f' - f_{n_0} = 0$，所以

$$n(32\Gamma_j, g = 0) + n(32\Gamma_j, g' = 1) < (1 + \delta)^\tau r_{m_j}^\tau$$

由文献[2] 中定理 5.8 知，对 $\forall\, a \in C$

$$n(\Gamma_j, g = a) < r_{m_j}^{\tau'}, \qquad (\tau < \tau' < \lambda) \tag{13}$$

最多除去一个球面半径为 $e^{-r_{m_j}^{\tau'}}$ 的球面圆。

由(11)、(13) 得 $\lambda < \tau'$，矛盾。从而在情形 I 下，证明了断言。

情形 II 类似可证。

综上所述，定理 1 对整函数的情形得到证明。

参 考 文 献

1 顾永兴．亚纯函数的正规族．成都：四川教育出版社，1991．241～252

2 杨乐．值分布论及其新研究．北京：科学出版社，1982．1～96

3 杨乐．亚纯函数在角域内的 Borel 方向．中国科学，数学专辑(I)，1979，149～162

4 伍胜建．整函数和亚纯函数的 Borel 可去集．中国科学，A 辑，1992，(19)：903～915