⑮
82-87

从文献分析看小波理论的发展*

Study on the Development of Wavelet Theory O174.22
by Analysing References of Wavelet

李建平**[①]　　陈廷槐[①]　　徐问之[①]　　张万苹[②]
Li Jianping　　Chen Tinghuai　　Xu Wenzi　　Zhang Wanping
(① 重庆大学计算机研究所,重庆,630044; ② 重庆钢铁专科学校; 第一作者 32 岁,男,博士生)

A **摘　要**　在国际联机检索大量小波文献的基础上,对小波文献进行了较深入的分析,提出了笔者自己的看法,同时介绍了笔者目前的工作。

关键词　Fourier 变换 / 小波变换; 时频局部化; 文献分析　调和分析
中国图书资料分类法分类号　O174.22　傅里叶变换

ABSTRACT　By CD-ROM and Internet-Service-System, lots of references on wavelet are searched. These references are analysed in the paper, a new viewpoint is put forward by the authors. Recent studies by the authors on wavelets are also introduced.

KEYWORDS　Fourier transform / wavelet transform; time-frequency localization; references analysis

0　引　言

小波理论是调和分析几十年来工作的结晶,是 Fourier 分析发展史上里程碑式的进展。由于该理论在众多学科尤其是在信号处理中成功的应用,而引起许多科学家的关注,成为国际热点。本文基于光盘(中文科技文献数据库、SPIRS3. 30 Ei Tech Index)、国际联机等检索手段,查阅了在国内、国际公开发表的小波与应用文献,对小波变换、加窗 Fourier 变换、Fourier 变换的优缺点进行了综合分析,介绍了笔者近期的工作。对小波理论尚待解决的有关问题及小波理论的发展前景进行了探讨。

1　小波文献分析

通过光盘、国际联机等方式检索小波文献(含国际会议),笔者查出从 1987～1995 年,国外公开发表的小波文献共计 630 篇,其中每年篇数分别为 8,9,9,20,42,70,64,309,98. 在这些文献中,小波与分形的结合研究论文 18 篇,小波与神经网络的结合研究论文 53 篇,小

* 收文日期　1996-03-12
** 现在后勤工程学院工作

波的 Mallat 算法研究论文 15 篇。国内公开发表的小波文献 91 篇，这些文献大部分为小波理论在图象处理等方面的应用研究，其中，1990 年 2 篇，1991 年 4 篇，1992 年 5 篇，1993 年 21 篇，1994 年 44 篇，1995 年 15 篇。

以上数据说明，国外研究小波的时间较早，80 年代就有文章发表，这正是小波理论真正产生的年代。国外在 1990 年形成第一次研究热潮，1992 年形成第二次研究热潮，1994 年小波研究达到白热化程度，形成第三次研究热潮。国外在小波研究方面形成的热潮可概括为"四多一广"即，会议多、论文集多、著作多、参与人数多、应用领域广。

小波理论被纯粹数学家和研究石油勘探数据处理、量子场论、声学等领域的工程技术专家独立地发现。J. O. Strömberg[1]于 1982 年首先构造出一个很接近现在称之为小波基的基（它被称之为历史上第一个小波基），但并未引起人们的注意。研究信号分析的工程师 J. Morlet[2]在 80 年代初最早使用了小波（Wavelet）这一名称。1986 年，Y. Meyer[3]在众多研究者的基础上，博采众长，构造出具有一定衰减性质的光滑函数 ψ，它的二进制伸缩与平移系：

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k) \mid j,k \in Z\}$$

构成 $L^2(R)$ 的规范正交基，现在称之为 Meyer 基的真正的小波基。1988 年 I. Daubechies 发表的论文[4]，构造了具有有限支集的正交小波基，是小波分析的经典的纲领性文献。1989 年，S. Mallat[5]与 Y. Meyer 建立了构造小波基的通用方法即多尺度分析。文献[6]是小波方面的第一套权威性、系统性著作，它详细地研究了各种小波基的构造，小波基与函数空间的关系，Calderon-Zygmund 算子在小波基上的表现，以及小波分析在复分析、算子论、偏微分方程与非线性分析等方面的应用。该著作的公开出版，可以说是小波理论形成的标志，表明著者 Y. Meyer 等为小波理论的建立做出了最重要的贡献。

国内小波研究起步较晚，直到 1990 年才有论文公开发表，1994 年形成国内的小波高潮，并已经取得重要进展。国内的小波文献以应用性研究居多，特别是图象处理等应用占相当大的比例，且以北京大学的程民德、石青云，华中理工大学的蔡德钧等为主要代表。

1996 年在北京召开的' 96 Beijing International Conference on Harmonic Analysis and Wavelet Analysis，来自国外优秀小波专家及国内众多研究者参加了这次会议。笔者向大会提交的论文* 是首次应用不动点理论研究 Mallat 算法，并取得有积极意义的成果，受到与会专家的较高评价。同年，国家教委委托举办的动力系统与小波分析高级研讨班在重庆大学举行。这两次活动有力推动了我国小波方面的研究工作。

Mallat 算法是小波理论的重要内容，笔者对其数学原理进行较深入的分析[7]，同时还首次将小波理论应用于平面叶栅设计**，取得满意效果。另外，笔者还研究了最佳小波基构造的一般方法[8]，结合小波与神经网络研究图象压缩[9]，效果很好。

---

* Fixed Point Theory Studies on Mallat Algorithm

** 基于小波理论的平面叶栅优化设计．重庆大学学报，1997（待发表）

2 小波研究分类

小波研究大体上分为二大类，即理论研究与应用研究。前者主要有 Y. Meyer，C. K. Chui，I. Daubechies 等人。其中 C. K. Chui 的样条小波（一维）研究[10]极富特色，他还将小波用于积分方程的求解[11]。另外，沈左伟研究了具有高正则性和任意阶可微样条小波框架[12]*，他们的成果与 C. K. Chui 的一维样条小波构成较完善的样条小波理论。沈左伟的样条框架理论适合信号处理，但对图象压缩效果不好。贾荣庆对多元伸缩方程进行了深入研究，取得一批优秀成果[13]**。

小波研究要数其应用研究热闹非凡。以 M. V. Wickhauser 为代表的一批研究者，取得了许多专利，其主要成果总结在文献[14]中。小波应用研究主要分为在数学、物理、力学、故障诊断与检测、数据与图象压缩、音乐、语音合成、石油地质勘控、军事工程等几方面的应用。

3 小波理论在数学及物理中的应用[15~19]

小波理论作为最新的时频分析工具已取得巨大的成功，下面仅就数学、物理等方面的应用举几个简单的例子。

例 1 Weierstrass 函数

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\cos(2^j t)$$

$$\tilde{\sigma}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\sin(2^j t)$$

的可微性研究。

显然，$\sigma(x)$ 与 $\tilde{\sigma}(x)$ 处处连续，但人们在研究其可微性时，曾使用很复杂的技巧和十分冗长的证明才得到 $\sigma(x)$、$\tilde{\sigma}(x)$ 处处不可微。但如果采用小波变换，其不可微的证明则变得异常简单。

例 2 H^1 的无条件基

小波几乎可以构成所有常用函数空间的无条件基。这一优良性质是众多学者尤其是调和分析学家们对它特别感兴趣的重要原因。然而，在小波理论产生以前，Hardy 空间 H^1 是否存在无条件基是作为问题提出来的。1980 年 Maurey 证明了这种基的存在性。1982 年 Car-

---

* ① Compactly Supported Tight Affine Spline Frames in $L_2(R^d)$. ('96 Beijing International Conference on Harmonic Analysis and Wavelet Analysis. Beijing; 1996

② Wely-Heisenberg Frames and Riesz Bases in $L_2(R^d)$. ('96 Beijing International Conference on Harmonic Analysis and Wavelet Analysis. Beijing; 1996

③ Affine Systems in $L_2(R^d)$; the Analysis of the Analysis Operator. ('96 Beijing International Conference on Harmonic Analysis and Wavelet Analysis. Beijing; 1996

** Multivariate Refinement Equations and Subdivision Schemes. '96 Beijing International Conference on Harmonic Analysis and Wavelet Analysis. Beijing; 1996 leson 与 Wojtaszczyk 等人通过修改 Haar 系，证明了 H^1 的无条件基的存在性并具体给出了这种基的构造，但这个过程十分复杂。由小波理论知，小波基是 H^1 的无条件基非常显然。

例 3　把一个量子场展开为相胞腔簇是研究量子场结构的重要方法，而小波正交基在这方面有重要应用，因为基于小波正交基的相胞腔簇的展开具有一系列良好的性质。

4　小波变换与 Fourier 变换的比较

附表　小波理论与 Fourier 分析的比较

	小波变换	加窗 Fourier 变换	Fourier 变换
连续变换	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert a\rvert^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} f(t)\mathrm{d}t$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\overline{g_a(t-b)}f(t)\mathrm{d}t$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)\mathrm{d}t$
离散变换	$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left[2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t-k)\right]}f(t)\mathrm{d}t$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-imw_0 t}\overline{g(t-nb_0)}f(t)\mathrm{d}t$	$\sum_{k\in Z} C_k e^{ikt}$
问题特征	1. 处理突变信号或具有孤立奇异性的函数 2. 自适应信号处理	1、处理渐变信号 2、实时信号处理	1. 处理渐变信号 2. 实时信号处理
时频窗特征	$[b+at^*-a\Delta_\psi,$ $b+at^*+a\Delta_\psi]\times$ $\left[\frac{\omega^*}{a}-\frac{1}{a}\Delta_{\hat\psi},\frac{\omega^*}{a}+\frac{1}{a}\Delta_{\hat\psi}\right]$	$[b-\sqrt{a},b+\sqrt{a}]\times$ $\left[\omega-\frac{1}{2\sqrt{a}},\omega+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$	
局部化特征	时-频同时局部化，具有自适应性	时-频局部化，格式固定不变	不具有局部化性质
性质	1、线性变换 2. 稳定的 3、表征化函数的局部规则 4、统一性和相似性	1. 线性变换 2、稳定的 3. 统一性和相似性	1、线性变换 2. 统一性和相似性
从连续变换到离散变换的比较分析	$\psi(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat\psi(\omega)$ 是紧支的	$\hat g(\omega)$ 是否紧支的不确定	$\psi(t)=e^{i\omega t}$ 的 Fourier 变换 $\hat\psi(\omega)$ 不是紧支的，即 $\psi(t)$ 不是严格带限的

续表

	小波变换	加窗 Fourier 变换	Fourier 变换
算法	FWT(Mallat) 算法	DFT,FFT 算法	DFT,FFT 算法
计算工作量	$O(N)$	$N\log N$	$N\log N$
缺点分析	1. 变换系数不具有对信号的平移不变性 2. 不能取代 Fourier 变换	不能敏感地反映信号的突变	1. $f\in L^p \Leftrightarrow \Sigma\lvert\ \rvert^p<\infty$, $p=2$, $1<p<\infty$ 2. 不能做局部分析
结论	1. 特别适合处理突变信号 2. 实际应用时，可将 Fourier 变换与小波变换结合起来使用	1. 有一定的应用场合 2. 适当选择窗口函数，可取得较好效果	特别适合处理长时间内较稳定的信号

5 小波理论待解决的有关问题

小波理论真正产生才几年时间，正在蓬勃发展，它的理论研究结果和应用范围一时还无法准确预料。下面几方面的研究显得非常有意义。

1) 小波的基本理论与方法；
2) 高维小波（张量积与非张量积形式）的理论研究；
3) 快速小波算法与小波包算法；
4) 超大规模科学计算的快速小波变换与算法；
5) 小波与分形的定量的辩证统一关系；
6) Mallat 算法的分形研究（不动点压缩原理）；
7) 小波理论在数值分析中的应用；
8) 小波理论在混沌湍流中的应用；
9) 小波理论在偏微分方程求解中的应用；
10) 小波理论在图象信号处理中的应用；
11) 小波的神经网络研究与神经网络的小波分析；
12) 小波分形与神经网络联合在图象压缩中的应用。

6 小波理论的发展前景

小波理论是科学家、工程师和数学家们共同创造的，反映了大科学时代学科之间综合、渗透的优势。小波理论来自 Fourier 分析，其思想也来源于 Fourier 分析，它不能代替 Fourier

分析，它是 Fourier 分析的新发展。小波理论与 Fourier 分析的互补优势和相辅相成的良好效果已被科研实践所证实。小波的发展，一方面需要从理论上提高和丰富，尤其是三维和三维以上的小波理论(因为它们尚很不成熟)，另一方面需要在实际应用中提出更多的研究课题，使小波应用的深度和广度得到进一步拓展。

由于小波理论处理问题的特殊技巧和特殊效果，小波分析不仅为纯数学与应用数学提供新的强有力的工具，而且是多媒体技术、信息高速公路某些核心技术的理论保证。

参 考 文 献

1 Strömberg J O. A modified Franklin system and higher order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces. In: Beckner W. Conf in honor of A Zygmund. New York: Academic Press, 1986. 475～493

2 Morlet J. Wave propagation and sampling theory and complex waves. Geophysics, 1982, 47(2): 222～236

3 Meyer Y. Wavelet with compact support. In: Beckner W. Conf in honor of A Zygnmund. New York: Academic Press, 1986. 1～8

4 Daubechies I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Comm on Pure and Appl Math, 1988, 41: 809～996

5 Mallat S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(7): 674～693

6 Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. Paris: Herman Press, 1990. 1～175

7 李建平，陈廷槐，张万苹 等．Mallat 算法的数学原理．后勤工程学院学报，1996，12(2)：35～39

8 李建平，陈廷槐，徐问之 等．最佳小波基构造的一般方法．见：靳蕃，范俊波．神经网络理论与应用研究'96．成都：西南交通大学出版社，1996．432～435

9 李建平，杨晓帆，陈廷槐 等．基于小波变换和神经网络的图象压缩．见：靳蕃，范俊范．神经网络理论与应用研究'96．成都：西南交通大学出版社，1996．436～439

10 Chui C K. An Introduction to Wavelets. New York: Academic Press, 1992. 1～450

11 Goswami J C, Chan A K, Chen C K. On Solving First-Kind Integral Equations Using Wavelets on a Bounded Interval. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1995, 43(6): 614～622

12 Ron A, Shen Z W. Frames and Stable Bases for Shift-Invariant Subspaces of $L_2(R^d)$. Can J Math, 1995, 47(5): 1 051～1 094

13 Jia R Q. The Subdivision and Transition Operators Associated with a Refinement Equation. Advaneed Topics in Multivariate Approximation, 1996, 17, 1～16

14 Wickhauser M V. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. New York: SIAM, 1994. 1～473

15 邓东皋，彭立中．小波分析．数学进展，1991，30(3)：294～310

16 王建忠．小波理论及其在物理和工程中的应用．数学进展，1992，21(3)：289～316

17 Meyer Y. Wavelets: Algorithms & Applications. New York: SIAM, 1993. 1～340

18 Chui C K. Wavelet: A Tutorial Theory and Applications. New York: Academic Press, 1992. 1～453

19 龙瑞麟．高维小波分析．北京：世界图书出版公司，1995．1～432