

①  
97, 20(2)  
1-9

# 粘性阻尼振动系统的 复模态摄动分析及应用

1-132  
TH113.1

## Perturbation Analysis of Complex Modes for Vibration System with Viscous Damping and Its Application

邓兆祥<sup>①</sup>  
Deng Zhaoxiang

梁锡昌<sup>②</sup>  
Liang Xichang

何渝生<sup>②</sup>  
He Yusheng

(<sup>①</sup> 重庆大学汽车学院, 重庆, 630044; <sup>②</sup> 重庆大学机械传动国家重点实验室; 第一作者 34 岁, 男, 博士, 副教授)

**摘要** 利用复模态的矩阵摄动理论, 分析一般粘性阻尼系统的模态频率和复振型对结构质量、刚度及阻尼修改的灵敏度特性, 从而阐明选择结构摄动修改方案和最灵敏位置的一般原理, 减小了复杂结构动态特性修改设计的计算量。通过对 RDT-1 试验台动态特性的摄动分析计算, 获得满足试验台工作特别要求的动态特性的结构设计方案。

**关键词** 灵敏度; 结构振动; 摄动法

中国图书资料分类法分类号 TH113.1

复模态摄动  
机械振动, 粘性阻尼系统

**ABSTRACT** The sensitivity characteristics of the undamped natural frequencies and complex mode shapes of vibration system with the non-proportional viscous damping with respect to structural mass, stiffness and damping modifications are analyzed in this paper using the matrix perturbation of complex modes. The general principles for the selectivity of the design and the most sensitive positions of the structural perturbation modifications are shown thereby. This is of importance to a great computational savings in the dynamic characteristic improvement of large or complex structures. By the dynamic characteristic sensitivity analysis of a test device type RDT-1, the optimal structural design for its especial requirement of dynamic characteristics is obtained easily and the principles presented in this paper are confirmed by the numerical results of perturbation analysis.

**KEYWORDS** sensitivity; structural vibration; perturbation method

## 0 引 言

在控制噪声、抑制振动和改善机器工作品质等许多情况下, 都需要进行结构动态特性的重分析和改进, 最有效的方法之一是进行模态灵敏度分析, 寻求可行的结构修改方案。对于

无阻尼或近似无阻尼振动系统的结构修改问题,可以使用为大家所熟知的实模态灵敏度分析<sup>[1~3]</sup>,但对一般粘性阻尼振动系统进行研究必须使用复模态理论,其灵敏度分析也必然是复模态灵敏度分析。而实际的机械系统大都存在较明显的阻尼,有时模态阻尼比甚至达0.6以上<sup>[4]</sup>,其振动性质以及动态特性与结构参数之间的关系表现出明显不同于实模态情形的特征,因此,有必要研究复模态下的结构修改问题。

考虑到现有灵敏度分析方法大都完全依赖于结构修改的数值计算,在选择结构修改方案时存在一定的盲目性,难免遗漏最佳修改部位,且具有计算量大的弱点。因此,笔者根据一般矩阵特征值问题的摄动分析理论,导出复模态增量与结构质量,刚度及阻尼元件摄动修改量之间显函数关系,以期揭示复模态下结构摄动修改的一般原理。笔者给出了一个试验台设计的应用实例,其数值计算结果恰验证所述原理。

## 1 复模态摄动公式

根据一般矩阵特征值的摄动分析理论<sup>[5~7]</sup>,对  $n$  自由度粘性阻尼振动系统作结构修改,使其质量、刚度和阻尼矩阵分别有微小增量  $\Delta M$ 、 $\Delta K$  和  $\Delta C$ ,则系统的复频率和复振型亦产生微小增量  $\Delta \lambda$  和  $\Delta \Psi$ ,即

$$\Delta \lambda_i = \Psi_0^T (\lambda_0^2 \Delta M - \lambda_0 \Delta C + \Delta K) \Psi_0 / a_{0i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\Delta \Psi_i = \sum_{j=1}^n (d_{i,j} \Psi_{0j} + \bar{d}_{i,n+j} \bar{\Psi}_{0j}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中符号加上横线表示取复共轭(下文同);  $\lambda_0$ 、 $a_{0i}$  和  $\Psi_0$  表示系统修改前的量,  $\lambda_0$  称为初始复频率,  $a_{0i}$  由复振型加权正交性质确定的数,其值与复振型正规条件有关,  $\Psi_0$  称为初始复振型,是  $n$  维向量;  $\Delta M$ 、 $\Delta K$  和  $\Delta C$  均为  $n \times n$  维实矩阵;系数  $d_{i,j}$  由振型正规条件确定;其余系数  $\bar{d}_{i,j}$  ( $j \neq i$ ) 为

$$d_{i,j} = \frac{1}{a_{0i}(\lambda_{0i} - \lambda_{0j})} \Psi_0^T (\lambda_0^2 \Delta M - \lambda_0 \Delta C + \Delta K) \Psi_0 \quad (j \neq i) \quad (3)$$

式中  $j > n$  时,取  $\Psi_{0j} = \bar{\Psi}_{0j-n}$ ,  $\lambda_{0j} = \bar{\lambda}_{0j-n}$ ,  $a_{0j} = \bar{a}_{0j-n}$ 。

为了使复模态摄动公式与实模态摄动公式统一起来,必须选择兼容实模态正则化条件的复振型正规条件。[7]未按此要求选择正规条件,结果没能完整地由复模态摄动公式导出实模态特例。其它一些文献则未涉及此问题。笔者选择复振型正规条件为

$$\begin{Bmatrix} \Psi_i \\ -\lambda_i \Psi_i \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & M \\ M & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_i \\ -\lambda_i \Psi_i \end{Bmatrix} = a_i = -2\lambda_i \quad (4)$$

其中  $M$ 、 $C$  分别为系统的质量、阻尼矩阵,均是  $n \times n$  对称阵,  $M$  正定,  $C$  正定或半正定。当  $C=0$  时,上式退化为实振型的正则化条件。结构修改前后的系统振型都应满足上述正规条件。对修改后的系统有  $C=C_0+\Delta C$ ,  $M=M_0+\Delta M$ ,  $\Psi_i=\Psi_{0i}+\Delta \Psi_i$  和  $\lambda_i=\lambda_{0i}+\Delta \lambda_i$ ,代入(4)式并利用复振型的加权正交性质可导出

$$d_{i,i} = \frac{\Delta \lambda_i}{2\lambda_{0i}} + \frac{1}{4\lambda_{0i}} \Psi_0^T (\Delta C - 2\lambda_{0i} \Delta M) \Psi_0 \quad (5)$$

于是在(4)式的正规条件下,可将复模态摄动公式重写为

$$\Delta \lambda_i = -\frac{1}{2\lambda_{0i}} \Psi_0^T (\lambda_{0i}^2 \Delta M - \lambda_{0i} \Delta C + \Delta K) \Psi_0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\Delta \Psi_i = \Delta \Psi_i^{(i)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \Delta \Psi_i^{(j)} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

其中  $\Delta \Psi_i^{(i)}$  表示第  $i$  阶初始复振型对其自身改变量的贡献,  $\Delta \Psi_i^{(j)}$  表示第  $j$  阶初始复振型对第  $i$  阶复振型改变量的贡献。分别由以下两式给出

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_i^{(i)} = & \left\{ \frac{\Delta \lambda_i}{2\lambda_{0i}} + \frac{1}{4\lambda_{0i}} \Psi_{0i}^T (\Delta C - 2\lambda_{0i} \Delta M) \Psi_{0i} \right\} \Psi_{0i} \\ & + \frac{1}{2\bar{\lambda}_{0i}(\bar{\lambda}_{0i} - \lambda_{0i})} \bar{\Psi}_{0i}^T (\lambda_{0i}^2 \Delta M - \lambda_{0i} \Delta C + \Delta K) \Psi_{0i} \bar{\Psi}_{0i} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_i^{(j)} = & \frac{1}{2\lambda_{0j}(\lambda_{0j} - \lambda_{0i})} \Psi_{0j}^T (\lambda_{0i}^2 \Delta M - \lambda_{0i} \Delta C + \Delta K) \Psi_{0i} \Psi_{0j} \\ & + \frac{1}{2\bar{\lambda}_{0j}(\bar{\lambda}_{0j} - \lambda_{0i})} \bar{\Psi}_{0j}^T (\lambda_{0i}^2 \Delta M - \lambda_{0i} \Delta C + \Delta K) \Psi_{0i} \bar{\Psi}_{0j}, \quad (j \neq i) \end{aligned} \quad (9)$$

从复模态的矩阵摄动公式显而易见,  $n$  自由度系统各结构元件修改对复模态增量的作用是彼此线性迭加的, 因此可分别讨论各结构元件单独修改对复模态的影响规律, 并不丧失一般性。

设仅在第  $r$  自由度上作质量修改  $\Delta m_r$ , 则系统质量矩阵增量为

$$\Delta M = \Delta m_r u_r u_r^T$$

其中  $u_r = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ 。

若记  $\lambda_{0i} = \omega_{0i} e^{j\beta_i}$ , 记复振型  $\Psi_{0i}$  第  $r$  个分量  $\Psi_{0ir} = |\Psi_{0ir}| e^{j\alpha_{ir}}$  (其余分量作类似处理), 代入(6)式得

$$\Delta \lambda_i = -\frac{1}{2} \Delta m_r \omega_{0i} |\Psi_{0ir}|^2 e^{j(2\alpha_{ir} + \beta_i)} \quad (10)$$

再代入(8)、(9)式得

$$\Delta \Psi_i^{(i)} = -\frac{1}{4} \Delta m_r |\Psi_{0ir}|^2 |\Psi_{0ir}| e^{j\alpha_{ir}} (3e^{j2\alpha_{ir}} + \frac{1}{\sin \beta_i} e^{j(\beta_i - 2\alpha_{ir} - \frac{\pi}{2})}) \quad (11)$$

$$\Delta \Psi_i^{(j)} = -\Delta m_r |\Psi_{0ir}| |\Psi_{0jr}| |\Psi_{0ir}| e^{j(2\beta_j + \alpha_{ir})} \cdot \omega_{0i}^2 g(\alpha_{ir}) \quad (j \neq i) \quad (12)$$

其中  $\Delta \Psi_i^{(i)}$ 、 $\Delta \Psi_i^{(j)}$  分别表示  $\Delta \Psi_i^{(i)}$ 、 $\Delta \Psi_i^{(j)}$  的第  $s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 个分量; 函数  $g(x)$  定义为

$$g(x) = \frac{\cos(2\beta_j - x - \alpha_{ir}) - \cos(\beta_j - x - \alpha_{ir}) \frac{\omega_{0i}}{\omega_{0j}} \cdot e^{j\beta_i}}{\omega_{0i}^2 - \omega_{0j}^2 - 2(\omega_{0i} \cos \beta_i - \omega_{0j} \cos \beta_j) \omega_{0i} e^{j\beta_i}} \quad (13)$$

容易进一步由(10)式导出模态频率  $\omega_{0i}$  的变化量  $\Delta \omega_{0i}$ 。

$$\begin{aligned} \because \omega_{0i} + \Delta \omega_{0i} &= |\lambda_{0i} + \Delta \lambda_i| \\ &= \omega_{0i} \left| 1 - \frac{1}{2} \Delta m_r |\Psi_{0ir}|^2 e^{j2\alpha_{ir}} \right| \\ \therefore \Delta \omega_{0i} &= \omega_{0i} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4} \Delta m_r^2 |\Psi_{0ir}|^4 - \Delta m_r |\Psi_{0ir}|^2 \cos 2\alpha_{ir}} - 1 \right) \end{aligned}$$

注意  $\Delta m_r$  是微量, 故有

$$\Delta \omega_{0i} = -\frac{1}{2} \Delta m_r \omega_{0i} |\Psi_{0ir}|^2 \cos 2\alpha_{ir} \quad (14)$$

类似地, 若仅在第  $p, q$  两自由度之间作内部连接刚度修改  $\Delta k_{pq}$ , 或内部连接阻尼修改  $\Delta c_{pq}$ , 亦可导出相应的复模态摄动公式分别为

$$\Delta\lambda_i = -\frac{\Delta k_{pi}}{2\omega_{0i}} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 e^{j(2\alpha_{pi} - \beta_i)} \quad (15)$$

$$\Delta\omega_i = -\frac{\Delta k_{pi}}{2\omega_{0i}} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 \cos 2(\alpha_{pi} - \beta_i) \quad (16)$$

$$\Delta\Psi_{0i}^{(j)} = -\frac{\Delta k_{pi}}{4\omega_{0i}^2} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 |\Psi_{0pi}| e^{j\alpha_{pi}} (e^{j(2\alpha_{pi} - \beta_i)} + \frac{1}{\sin\beta_i} e^{j(\beta_i - 2\alpha_{pi} - \frac{\pi}{2})}) \quad (17)$$

$$\Delta\Psi_{0i}^{(j)} = -\Delta k_{pi} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}| |\Psi_{0pj} - \Psi_{0pj}| |\Psi_{0pi}| e^{j\alpha_{pi}} g(\alpha_{pij}) \quad (j \neq i) \quad (18)$$

$$\Delta\lambda_i = \frac{1}{2} \Delta c_{pi} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 e^{j2\alpha_{pi}} \quad (19)$$

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{2} \Delta c_{pi} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 \cos(2\alpha_{pi} - \beta_i) \quad (20)$$

$$\Delta\Psi_{0i}^{(j)} = \frac{\Delta c_{pi}}{2\omega_{0i}} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}|^2 |\Psi_{0pi}| e^{j\alpha_{pi}} (e^{j(2\alpha_{pi} - \beta_i)} + \frac{1}{2\sin\beta_i} e^{j(2\beta_i - 2\alpha_{pi} - \frac{\pi}{2})}) \quad (21)$$

$$\Delta\Psi_{0i}^{(j)} = \Delta c_{pi} |\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi}| |\Psi_{0pj} - \Psi_{0pj}| |\Psi_{0pi}| e^{j(\alpha_{pi} + \alpha_{pij})} \omega_{0i} g(\alpha_{pij}) \quad (j \neq i) \quad (22)$$

式中  $\alpha_{pi}$ 、 $\alpha_{pij}$  分别表示  $(\Psi_{0pi} - \Psi_{0pi})$  和  $(\Psi_{0pj} - \Psi_{0pj})$  的相角。

顺便指出,用上述摄动公式给出的复模态增量除以所用结构元件修改量,即得相应复模态灵敏度分析公式。显然,讨论上述复模态摄动公式的性质与讨论复模态灵敏度的性质是一致的。

## 2 复模态摄动性质

### 2.1 实模态特例

对无阻尼振动系统 ( $\Delta C = C_0 = 0$ ),按复模态理论处理时,所得复频率必为纯虚数,即  $\lambda_i = j\omega_{0i}$ ,  $\Delta\lambda_i = j\Delta\omega_i$ ; 所得复振型必退化为实振型,即  $\Psi_{0i} = \bar{\Psi}_{0i}$ ,故从(6)~(9)式可得模态频率和振型摄动公式

$$\Delta\omega_i = \Psi_{0i}^T (\Delta K - \omega_{0i}^2 \Delta M) \Psi_{0i} / 2\omega_{0i} \quad (23)$$

$$\Delta\Psi_{0i} = -\frac{1}{2} \Psi_{0i}^T \Delta M \Psi_{0i} \Psi_{0i} + \frac{1}{\omega_{0i}^2 - \omega_{0j}^2} \sum_{j=1}^n \Psi_{0j}^T (\Delta K - \omega_{0i}^2 \Delta M) \Psi_{0i} \Psi_{0j} \quad (24)$$

与实模态下导出的摄动公式<sup>[3]</sup>完全相同。类似地,亦可由各结构元件单独修改的复模态摄动公式直接导出相应的实模态摄动公式,此不赘述。可见,复模态灵敏度分析是包容实模态灵敏度分析的更一般理论。

### 2.2 结构修改对模态频率的影响

从(10)、(15)和(19)式可见,作结构修改时不但引起复频率模的变化,也引起其相角的变化,正是复频率增量与初始复频率的这种矢量合成关系,使模态频率受结构修改影响的关系呈现出不同于实模态情形的复杂特征。

#### 2.2.1 影响趋势

从(14)式可见,当  $\cos 2\alpha_{pi} > 0$  时,增加质量使模态频率降低,减小质量使模态频率升高;当  $\cos 2\alpha_{pi} < 0$  时,增加质量反而使模态频率升高,减小质量使模态频率降低。由于  $\alpha_{pi}$  表示修改质量处某阶初始复振型分量的相角,所以这里所述关系说明模态频率受质量修改影响的变化趋势与所选择的修改位置有关,同样是增加结构质量,但选择不同修改部位,对不同阶次模态频率的影响趋势可能截然相反。

对(16)和(20)式亦可作类似讨论,同样得到相似的多变性影响趋势,但注意决定变化趋

势的判断条件稍有不同,对于刚度修改为  $\cos 2(\alpha_m - \beta)$  是正或负,对于阻尼修改为  $\cos(2\alpha_m - \beta)$  是正或负,即这两者还与复频率的相角有关。

当振动系统无阻尼或接近无阻尼时,  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $2\alpha_m \rightarrow 0$  或  $2\pi$ ,  $2\alpha_m \rightarrow 0$  或  $2\pi$ , 因此恒有  $\cos 2\alpha_m \rightarrow 1$ ,  $\cos 2(\alpha_m - \beta) \rightarrow -1$ , 即得到与实模态情形一致的单一影响趋势; 不论选择什么修改部位, 增加质量或减小刚度使模态频率降低, 反之使模态频率升高。不难看出, 复模态下结构修改对模态频率影响趋势的规律是包含了实模态情形的一般规律。

顺便指出, 实际应用和大量数值模拟表明, 在多数情况下, 复模态下结构修改对模态频率的影响趋势与实模态情况是一致的, 但当模态阻尼比大于 0.4 时, 容易遇到影响趋势恰与实模态情形相反的情况, 在复模态结构修改时应予以特别注意。

### 2.2.2 影响显著性

从(14)式(从(16)和(20)式)可见, 当选择质量(刚度或阻尼)修改部位使  $|\Psi_{0m}| \rightarrow 0$  (使  $|\Psi_{0m} - \Psi_{0n}| \rightarrow 0$ ), 即恰位于某阶初始复振型的节点(两个分量接近相等的两个自由度之间)时, 有  $\Delta\omega_i \rightarrow 0$ , 即该阶模态频率几乎不发生变化; 反之, 若修改部位恰位于腹部(两个分量相差很大的两自由度之间)时, 则该阶模态频率会随结构质量(刚度或阻尼)修改发生显著变化。

从(14)、(16)和(20)式易知, 模态频率增量与初始模态频率在质量修改时成正比, 在刚度修改时成反比, 在阻尼修改时不相关, 因此, 修改质量对高阶频率的影响及修改刚度对低阶频率的影响一般都较显著, 为此常将结构动态特性的低频段称为刚度控制区, 高频段称为质量控制区。

以上两点显著性影响规律与实模态下的结论是一致的, 但在复模态下结构修改对模态频率影响的显著性还与修改部位的复振型分量的相角、复频率的相角等有关。从(14)式可见, 当  $\cos 2\alpha_m \rightarrow 0$  时,  $\Delta\omega_i \rightarrow 0$ , 即在质量修改部位的某阶初始复振型分量的相角  $\alpha_m$  趋于  $\pm \frac{\pi}{4}$  或  $\pi \pm \frac{\pi}{4}$  时, 刚该阶模态频率几乎不随质量修改而变化。从(16)或(20)式知, 当  $\cos 2(\alpha_m - \beta) \rightarrow 0$  或  $\cos(2\alpha_m - \beta) \rightarrow 0$  时,  $\Delta\omega_i \rightarrow 0$ , 即在刚度修改和阻尼修改时, 亦可遇到因修改部位复振型相角恰满足一定关系而使模态频率不敏感。

### 2.3 结构修改对复振型的影响

从(11)、(12)、(17)、(18)、(21)和(22)式可见, 作结构修改时, 各阶初始复振型对某阶复振型改变量的贡献, 在相位上彼此一般不相同, 与该阶初始复振型相应分量的相位一般也不相同, 因此, 各阶贡献量与初始复振型相应分量的迭加也是矢量迭加, 从而使复振型受结构修改影响的变化规律表现出比实模态下更复杂的特征。

#### 2.3.1 影响趋势

从(11)式可见, 修改质量时第  $i$  阶初始复振型对其自身变化量的贡献趋势与  $(3e^{2\alpha_m} + \frac{1}{\sin \beta} e^{j(2\alpha_m - 2\alpha_n - \frac{\pi}{2})})$  的相角有关, 当振动系统无阻尼或接近无阻尼时, 因  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $2\alpha_m$  和  $2\alpha_n$  均趋于零或  $2\pi$ , 故恒有该相角趋于零, 即得与实模态情形一致的单一影响趋势; 不论修改部位怎样选择, 增加质量, 初始复振型对其自身变化量的贡献使其各分量在模的意义上趋于减小; 反之, 使其各分量在模的意义上趋于增大。而振动系统在一般阻尼情况下, 该相角取值与修改部位的复振型分量的相角、被影响部位的复振型分量的相角以及复频率的相角有关, 可

能取任何值,故选择不同质量修改部位,初始复振型对其自身变化量的贡献趋势可能截然相反,且同一阶复振型的各分量的贡献趋势也彼此不同,甚至截然相反。

对其它复振型振动公式亦可作类似讨论,将得到相似的多样性影响趋势,只不过决定变化趋势的判断条件各不相同,在此从略。

### 2.3.2 影响显著性

从(11)、(12)式(从(17)、(18)和(21)、(22)式)可见,当选择质量(刚度或阻尼)修改部位,使 $|\Psi_{0n}| \rightarrow 0$ 或 $|\Psi_{0j}| \rightarrow 0$ (使 $|\Psi_{0n} - \Psi_{0n}| \rightarrow 0$ 或 $|\Psi_{0n} - \Psi_{0j}| \rightarrow 0$ ),即恰位于某阶初始复振型的节点(两个分量接近相等的两自由度之间)时,则有 $\Delta\Psi_n^{(i)} \rightarrow 0, \Delta\Psi_j^{(j)} \rightarrow 0$ ,即该阶复振型几乎不随质量(刚度或阻尼)修改而发生变化,该阶初始复振型对其它阶复振型变化量也几乎没有贡献;反之,若修改部位恰位于复振型的腹部(两个分量相差很大的两自由度之间)时,则该阶复振型一般会因结构质量(刚度或阻尼)修改而发生较显著的变化,该阶初始复振型对其它阶复振型变化量的贡献一般也较显著。

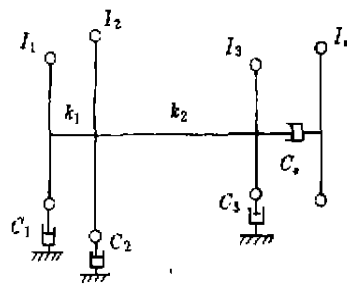
从(11)、(17)和(21)式可见,第 $i$ 阶初始复振型对其自身改变量的贡献,在修改质量时与其阶次高低无关;在修改刚度时与 $\omega_0^2$ 成反比,即随阶次增高而迅速减小,直至可以忽略;在修改阻尼时与 $\omega_0$ 成反比,即阶次越高,其贡献越小,直至可以忽略。

从(13)式可见,当阶次 $i, j$ 较接近时, $g(x)$ 在模的意义上一般会较大,而阶次相距很远时, $g(x)$ 在模的意义上一般会较小,当 $j \gg i$ 时, $g(x) \rightarrow -\frac{\cos(2\beta_j - x - \alpha_j)}{\omega_0^2}$ ;当 $i \gg j$ 时, $g(x) \rightarrow \frac{-\cos(\beta_j - x - \alpha_n)e^{i\beta_j}}{\omega_n \omega_0 (1 - 2\cos\beta_j e^{i\beta_j})}$ ,故容易从(12)、(13)和(22)式知,作结构修改时,只有阶次接近的几阶初始复振型才彼此对复振型变化量有较大贡献;当 $j \gg i$ 时, $\Delta\Psi_n^{(j)} \rightarrow 0$ ,即不论作质量修改、刚度修改还是阻尼修改,阶次越高的初始复振型对低阶复振型变化量的贡献越小,直至可忽略不计;当 $i \gg j$ 时若作刚度修改, $\Delta\Psi_j^{(i)} \rightarrow 0$ ,即低阶初始复振型对越高阶复振型的改变量的贡献越小,直至可忽略不计;当 $i \gg j$ 时,若作阻尼修改, $\Delta\Psi_j^{(i)}$ 下降但不趋于零,即低阶初始复振型对越高阶复振型的改变量的贡献越小,但不可忽略;当 $i > j$ 时,若作质量修改,低阶初始复振型对较高阶复振型改变量的贡献一般较小,但当阶次相距足够远时,低阶对更高阶变化量的贡献反而有增大的趋势。

## 3 在 RDT-1 试验台设计中的应用

RDT-1 是用于发动机曲轴扭振减振器设计研究和生产检测的专门动态试验台,可简化成附图所示扭振系统。其中 $c, I$ 分别是被试减振器的扭振阻尼系数和惯性环转动惯量; $k_1, k_2$ 和 $I_1, I_2, I_3$ 分别是试验台相应结构的等效扭转刚度和转动惯量,惯量 $I_3$ 中包含被试减振器壳体的转动惯量; $c_1, c_2$ 和 $c_3$ 分别为试验台扭振系统各部分的边界约束阻尼系数。

根据扭振阻尼的共振测量原理<sup>[8,9]</sup>,在试验中给试验台整个扭振轴系提供一足够高的基础转速,同时对 $I_1$ 施加交变激励力矩,通过测量 $I_3$ 的一阶共振振幅来估计减振器阻尼系数 $c$ 。这种工作原理对 RDT-1 试验台的扭振动态特性提出以下特别要求:一阶共振频率大小适当,



附图 RDT-1 试验台扭振模型

以便结构实现激振和调节;一阶振型在  $I_3$  处分量最大,在  $I_1$  处分量较大,以便获得较高信噪比的测量信号;一阶振型在  $I_3$ 、 $I_1$  处的两个分量应相差显著,以便一阶共振响应对减振器阻尼变化有较高的灵敏度;高阶共振频率应远大于一阶共振频率,以减小对一阶共振的影响。

表 1 RDT-1 试验台扭振复模态

阶次	初步设计方案		改进设计方案	
	模态频率	阻尼比	模态频率	阻尼比
1	95.355	0.063773	94.533	0.110028
2	539.994	0.003327	523.595	0.003618
	复振型实部	复振型虚部	复振型实部	复振型虚部
1	0.645611	0.02204	0.500093	0.02997
	0.620378	0.02323	0.481004	0.032154
	-0.466163	0.108142	-0.607105	0.191085
	-0.318008	-0.186323	-0.450197	-0.227896
2	1.603607	-0.005159	1.655525	-0.005003
	-0.411267	-0.001773	-0.300152	-0.001464
	0.008121	-0.001078	0.00963	-0.002125
	0.000505	0.001505	0.000793	0.001802

表 2 改进方案 RDT-1 试验台结构变化的复模态参数摄动解

变化参数	阶次 项目	1		2	
		模态频率	阻尼比	模态频率	阻尼比
$\Delta I_1 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	摄动解	93.827	0.110929	480.544	0.003076
	灵敏度	-11.767	0.015	-717.516	-0.009
$\Delta I_2 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	摄动解	93.88	0.110957	522.18	0.003644
	灵敏度	-10.883	0.0155	-23.583	0.0004
$\Delta I_3 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	摄动解	93.594	0.103038	523.594	0.003616
	灵敏度	-15.65	-0.1165	-0.016	0
$\Delta I_4 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	摄动解	94.107	0.116172	523.595	0.003618
	灵敏度	-7.1	0.1024	0	0
$\Delta c_1 = 0.04(\text{kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$	摄动解	94.065	0.105468	523.595	0.003618
	灵敏度	-11.7	-0.114	0	0
$\Delta k_2 = 0.02(\text{MN} \cdot \text{m})$	摄动解	97.766	0.112318	523.641	0.003617
	灵敏度	161.65	0.1145	2.301	0
$\Delta k_1 = 0.02(\text{MN} \cdot \text{m})$	摄动解	94.534	0.110028	525.445	0.003605
	灵敏度	0.05	0	92.502	-0.0007

根据上述扭振动态特性要求、试验台激振原理和强度要求<sup>\*</sup>,初步选择设计方案,其扭振动态特性如表1所示(非振动模态表中未列出),显然,主要在一阶振型上尚未完全满足设计要求,即 $I_3$ 处的一阶振型分量在模的意义上较小。按照本文所述复模态摄动性质,分析初步设计方案的两阶扭振模态,不难得知,若减小 $I_3$ 、增大 $I_2$ 转动惯量可使一阶振型朝设计要求的方向变化。于是按此方式改进设计方案,得到新方案试验台的两阶扭振模态亦列入表1中,可见它完全满足前述RDT-1试验台动态特性的各项设计要求。试验台制成后,在对比试验和实际应用测得的动态特性和固有频率也与上述结论一致。

为了评价改进方案设计的试验台动态特性随结构修改变化的特点,对试验台主要结构参数作3%~9%的微量摄动修改,计算结果列于表2和表3中。

表3 改进方案RDT-1试验台结构变化的复振型摄动解

阶次 变化参数	1		2	
	复振型实部	复振型虚部	复振型实部	复振型虚部
$\Delta I_1 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.491485	0.02908	1.498766	-0.004281
	0.469317	0.031834	-0.3214	-0.001384
	-0.610188	0.191136	0.011557	-0.002704
	-0.454503	-0.228741	0.001059	0.002263
$\Delta I_2 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.488857	0.029582	1.660132	-0.004989
	0.470463	0.031705	-0.290415	-0.001434
	-0.61031	0.191234	0.009367	-0.002071
	-0.436153	-0.228845	0.000775	0.001757
$\Delta I_3 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.503657	0.028549	1.655537	-0.00501
	0.484779	0.030512	-0.300144	-0.001468
	-0.591868	0.177471	0.00903	-0.001838
	-0.436153	-0.22363	0.000713	0.001696
$\Delta I_4 = 0.06(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.504251	0.032464	1.655525	-0.005003
	0.485197	0.034786	-0.300153	-0.001464
	-0.601386	0.201437	0.009647	-0.002145
	-0.436743	-0.229243	0.000733	0.001713
$\Delta c_1 = 0.04(\text{kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$	0.501266	0.02788	1.655528	-0.005001
	0.482311	0.029958	-0.300151	-0.001463
	-0.598384	0.18314	0.009533	-0.002211
	-0.460077	-0.217097	0.000871	0.001871
$\Delta k_1 = 0.02(\text{MN} \cdot \text{m})$	0.510019	0.031987	1.650882	-0.005029
	0.489169	0.034459	-0.299656	-0.001452
	-0.62386	0.19919	0.010237	-0.002264
	-0.452918	-0.23896	0.000844	0.001916
$\Delta k_2 = 0.02(\text{MN} \cdot \text{m})$	0.499975	0.029985	1.655528	-0.004986
	0.481025	0.032153	-0.300114	-0.001459
	-0.607107	0.191087	0.009564	-0.002104
	-0.450195	-0.227898	0.000783	0.001785

\* 《RDT-1试验台设计计算说明书》,重庆大学汽车工程系,1994.2



从表中可见,修改  $I_1$  显著改变试验台的一阶共振频率和振幅,而几乎不影响二阶共振频率和振幅;修改  $I_2$  对一阶共振频率和振幅的影响不及修改  $I_1$  时显著,但对二阶共振频率和振幅的影响却较显著。因此,若试验台需设置配重环调节共振振幅时,应选择在  $I_1$  处。

由表 1 可见,  $I_1$  恰处于改进方案试验台的一阶振型的最大模分量处(振型腹部),处于二阶振型的模接近于零的分量处(振型节点区域);  $I_2$  处于一阶振型的较小模的分量处,但远离节点,处于二阶振型的模较大的分量处。因此,从上文所述的质量修改对复模态影响的显著性规律知,修改  $I_1$  显著影响一阶模态,几乎不影响二阶模态,修改  $I_2$  对一、二阶模态均有一定程度的影响。与由表 2 和表 3 的数值结果给出的结论比较,显然两者是相同的。

类似地,亦可详细讨论其它结构参数修改对试验台动态特性的影响,总之可见,表中所列数值结果,恰与复模态摄动的理论分析结果吻合。

## 4 结 论

本文通过将复模态摄动量表示为振动结构基本元件,即质量、刚度和阻尼修改量的函数,详细探讨结构修改量对模态频率和复振型的影响规律,实际上揭示了振动系统结构动态修改的一般原理。运用这一原理可以有效地进行系统动态特性改进设计,文中仅给出了一个简单的应用实例,实际上运用这一原理的主要意义在于避免结构试探性修改的盲目性,可以大量缩减对大型复杂系统的设计计算时间。

通过对复模态摄动性质的讨论可见,复模态灵敏度分析理论是包容实模态灵敏度分析的更一般理论,后者仅是前者的一个特例,与实模态情形相比,复模态随结构修改的变化呈现出更复杂的规律。结构修改对模态频率和复振型的影响不但显著性与修改部位有关,而且影响趋势也与修改部位有关,在复模态下增加结构质量或减小结构刚度,有可能反而使模态频率增加,因此应引起特别重视。

## 参 考 文 献

- 1 Zimoch Z. Sensitivity analysis of vibration systems. *Journal of sound and vibration*, 1987, 115(3), 447~458
- 2 Vanderplats GN. Comment on methods of design sensitivity analysis in structural optimization. *AIAA J.* 1980, 18(11), 1406~1407
- 3 冯振东, 吕振华. 振动系统实模态参数灵敏度分析. *固体力学学报*, 1989, 10(4), 359~363
- 4 胡子正, 杨小波, 邵成. 汽车传动系扭振特征辨识. *汽车工程*, 1992, 14(1), 32~38
- 5 Rudisill C S. Derivatives of eigenvalues and eigenvectors for a general matrix. *AIAA J.* 1974, 12(5), 721~722
- 6 刘满, 陈塑寰. 复模态理论的矩阵摄动法. *吉林工业大学学报*, 1986, 16(3), 1~9
- 7 陈塑寰. 随机参数结构的振动理论. 长春: 吉林科学技术出版社, 1992. 54~66
- 8 邓兆祥, 何渝生. 发动机减振器的试验技术. *机械工艺师*, 1995, (6), 12~13
- 9 何渝生. 发动机硅油减振器试验台. *内燃机工程*, 1980, 1(4), 36~52