(18) 100-105

平面自治系统解的有界性及周期解的存在性*

Boundedness of Solutions and Existence of Periodic Solutions for Autonomous Planar System

O175.12

杨启贵　　　陈均平
Yang Qigui　　　Chen Junping
(重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；第一作者 30 岁，男，硕士)

摘　要　讨论一般的平面自治系统的解的有界性与周期解的存在性，得到了含有多个奇点的(1)的解的正向有界充要条件和存在周期解的充分条件，推广和改进了有关的结果。

关键词　平面自治系统；有界性；周期解　存在性　解
中国图书资料分类法分类号　O175.12；O175.14

ABSTRACT　This papar discusses the boundedness of solutions and the existence of periodic solutions for general autonomous planar system with a finite number of singular points. Some sufficient and necessary conditions for all solutions of the system to be bounded for t⩾o and some sufficient conditions for the existence of a nonzero periodic solution of the system under given conditions are obtained. The related results are extended and improved.

KEYWORDS　planar autonomous system; boundedness; periodic solutions

0 引　言

关于平面自治系统尤其是其特殊系统解的有界性与周期解的存在性，国内外已有大量文献进行过研究，取得丰富成果，[1~12]，且这方面结果至今仍在各种数学期刊上不断涌现。在假定系统只有唯一奇点的条件下，[2~7]得到不少解的有界性和周期解存在的条件，然而，许多实际问题是具有多个奇点，因此，近年来引起一些国内外作者对平面自治系统或其特殊系统具有多个奇点时解的有界性及周期解的存在性进行了探讨[8~12]。

笔者研究含有多个奇点的一般平面自治系统

$$\dot{x}=p(x,y)\qquad \dot{y}=Q(x,y) \tag{1}$$

的解有界性和周期解的存在性问题，首先得出了含多个奇点的系统(1)的解有界的充要条件和周期解存在的充分条件，推广和改进[1～2]工作，所得结果以[1]的全部结果及[2]的相应结论为特例。

文中，均设 $P(x,y),Q(x,y)\in C(R^2,R)$，且保证(1)初值问题解的唯一性。

记　$f(x,y)=[Q(x,y)-Q(x,0)]/P(x,y)$

* 收文日期 1996-06-10

为了简化定理证明，首先介绍两个引理

引理 1　如果 $yp(x,y)>0(y\neq 0)$，且 $\underline{\lim}_{y\to\infty}|p(x,y)|>0$，那么系统(1)的解没有垂直渐近线。

证　只证(1)的任何正半轨不存在垂直渐近线即可用类似方法可证(1)的任一负半轨也不存在垂直渐近线。

假设不然，那么，至少存在一正半轨有垂直渐近线，记这样的正半轨为 T^+，且其参数方程为 $x=x(t),y=y(t)$，易证存在 t_0 使得当 $t\geqslant t_0$ 时有 $y(t)>0$(或 $y(t)<0$)，沿 T^+ 从 t_0 到 $t\geqslant t_0$ 对 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(x,y)$ 积分，得

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t0}^{t}p(x(t),y(t))\mathrm{d}t$$

因此，由引理条件知当 $\lim_{t\to+\infty}y(t)=+\infty(-\infty)$ 时可导出 $\lim_{t\to+\infty}x(t)=+\infty(-\infty)$，明显与 T^+ 有垂直渐近线矛盾。引理 1 得证。

引理 2[8]　若有界区域 G 中最多含有有限个奇点，且包含一正半轨线 γ_r^+，则系统(1)的 γ_r^+ 的 ω 极限点集只可能是：

1)　唯一的奇点；或
2)　唯一的闭轨线；或
3)　可列个两端邻接奇点的轨线。

1　主要结果

定理 1　如果系统(1)满足

C_1)　$yp(x,y)>0(y\neq 0)$，$\underline{\lim}_{y\to\infty}|p(x,y)|>0$

C_2)　当 $|x|$ 充分大时，存在连续函数 $p_1(y)$、$p_2(y)$ 使

$$p_1(y)\leqslant p(x,y)\leqslant p_2(y)$$

C_3)　对 $\forall$ $h\in C(R^+,(0,+\infty))$ 和 $h^*\in C(R^-,(-\infty,0))$ 有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_0^x f(x,h(s))\mathrm{d}s<+\infty$$

$$\underline{\lim}_{x\to-\infty}\int_0^x f(s,h^*(s))\mathrm{d}s>-\infty$$

C_4)　当 $|y|$ 充分大时，存在连续函数 $F_1(x)$、$F_2(x)$ 使

$$F_1(x)\leqslant f(x,y)\leqslant F_2(x)$$

C_5)　$\exists$ $a\geqslant 0$ 及 $\gamma(x)\in C^1((-\infty,-a],R^+)$(或 $\gamma(x)\in C^1([a,+\infty),R^-)$ 使得

$$Q(x,\gamma(x))\text{-}p(x,\gamma(x))\gamma^1(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$$

C_6)　$\exists$　$b\leqslant 0\leqslant c$ 使得 $x\overline{\in}[b,c]$时，$xQ(x,o)<0$，

C_7)　$\lim_{x\to-\infty}(\int_0^x Q(s,0)\mathrm{d}x+\int_0^x f(s,h(s))\mathrm{d}s)=-\infty$

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\int_0^r Q(x,0)\mathrm{d}x-\int_0^s f(s,h^*(s))\mathrm{d}s\right)=-\infty$$

则系统(1)的所有正半轨有界。

定理2 若$C_1)\sim C_6)$成立，且$\int_0^{+\infty}Q(x,0)\mathrm{d}x$和$\int_0^{-\infty}Q(x,0)\mathrm{d}x$至少一个有界，则系统(1)所有正半轨有界的充要条件是$C_7)$成立。

定理3 若$C_1)\sim C_7)$成立，且

C_8 系统(1)的有限个奇点均为局部排斥(repulsive)，则系统(1)至少有一个非零周期解。

附注1 由于$Q(x,0)$在区间$[b,c]$上可以无限多次改变符号，从而系统(1)可能有许多奇点。

附注2 若当$y>0$充分大时，$\overline{\lim\limits_{x\to-\infty}}f(x,y)<0$(或当$y<0$充分小时$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f(x,y)<0$)，且$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|Q(x,0)|}{-f(x,y)}<\sup\limits_{y\in R^+}\{p(x,y)\}$或$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|Q(x,0)|}{-f(x,y)}<\sup\limits_{y\in R^-}\{-p(x,y)\}$)，那么当$C_4$)成立时$C_5$)成立。事实上，由上面假设知：存在$a>0$及充分大$k_0>0$使得$f(x,k_0)<0$和$p(x,k_0)\geqslant-\dfrac{|Q(x,0)|}{f(x,k_0)}$(或$-p(x,-k_0)\geqslant-|Q(x,0)|/f(x,-k_0)$)对$x\leqslant-a$(或$x\geqslant a$)，所以取$\gamma(x)=k_0$(或$\gamma(x)=-k_0$)，则$C_5$)成立。

附注3 定理1～3中，当系统(1)为如下特殊系统时

$$\dot{x}=p(y)\qquad \dot{y}=-f(x)p(y)-g(x)\tag{2}$$

可得含有多个奇点广义Lienard系统(2)解的正向有界的充要条件及存在非零周期解的充分条件，这时[1]的结果为本文的特例；再若定理1～3中，对(2)中的$p(y)\equiv y$时，则得Lienard方程含有多个奇点的情形，得到[2]相应结果，并去掉或放松一些相应限制条件。特别地，C_6)中$b=c=0$时，可得含有唯一奇点的Lienard方程，所得解的正向有界的充要条件和存在周期解的充分条件与[6]、[10]中相应结论是不同的，它们不能互相包容。

附注4 若系统(1)的所有奇点均为源时，则条件C_8)成立；再若C_4)中$b=c=0$，且$0<|x|$、$|y|\ll1$时有$f(x,y)\geqslant0,\neq0$，$x[p(x,y)-p(0,y)]\geqslant0$，则系统(1)的唯一奇点$0(0,0)$是局部排斥的，实际上，取包围原点的闭曲线

$$\lambda(x,y)=\int_0^y p(0,y)\mathrm{d}y-\int_0^x Q(x,0)\mathrm{d}x=\mathrm{C}$$

当$0<C\ll1$时

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1)}=Q(x,0)[p(x,y)-p(0,y)]+p(0,y)p(x,y)f(x,y)$$

$$\geqslant0,\neq0,$$

由此，原点是局部排斥，此时C_8)成立。

附注5 若函数$p(x,y)$、$Q(x,y)$解析，C_6)中$b=c=0$时，由定理3和[4]的定理1.5知满足C_1-C_8)的系统(1)至少有一个稳定极限环。

2 定理的证明

定理1的证明

首先考虑 C_5)中关系 $\gamma(x)\in C^1((-\infty,-a],R^+)$

设(x_0,y_0)是相平面上任一点，若要结论成立，只需证过点(x_0,y_0)的正半轨有界即可。

选取常数 k 使得

$$k > \max\{|a|,|b|,|c|,|x_0|,|y_0|\}$$

那么系统(1)的所有奇点和点(x_0,y_0)都在矩形区域$\{(x,y)\,|\,|x|<k,|y|<k\}$中。

由 C_1),C_2)，易证 $1/p(x,y)$当 $y\in[k,+\infty)$和 $y\in(-\infty,-k]$时有界，设

$$M = \sup_{\substack{|x|\leqslant k\\|y|\geqslant k}}\{1/p(x,y)\}$$

又由 C_4)知，$f(x,y)$在 $|x|\leqslant k,|y|\geqslant k$ 时有界，令

$$N = \sup_{\substack{|x|\leqslant k\\|y|\geqslant k}}\{|f(x,y)|,|Q(x,0)|\}$$

$$W > \max\{k+2kN(1+M),\gamma(-k)\}$$

且设(1)从点 $A(-k,w)$出发的正半轨为 T_A^+，$y=y(x)$是它的方程，$x=x(t)$，$y=y(t)$为 T_A^+ 关于时间 t 的参数方程。因为 $yp(x,y)>0(y\neq 0)$，因而在 $y>0$ 的半平面上，随着 t 的增加，在 T_A^+ 上的点$(x(t),y(t))$将沿着 T_A^+ 向右移动。为此，我们将证明 T_A^+ 在 $y>0$ 半平面上当 $t_1>t_0$ 时必与直线 $x=k$ 相交，且对 $t\in[t_0,t_1,]$时有 $y(t)>k$，其中这里 t_0 满足 $x(t_0)=-k,y(t_0)=w$.

否则，由引理 1 和定理 1 条件知，存在 $d\in[-k,k]$使得 $y(d)=k$，且对 $x\in[-k,d]$有 $y(x)>k$。另一方面，沿着 T_A^+ 在$[-k,d]$上对如下方程积分

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{p(x,y)}=f(x,y)+\frac{Q(x,0)}{p(x,y)} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}k-w&=-\int_{-k}^{d}[-f(x,y(x))]\mathrm{d}x-\int_{-k}^{d}\frac{Q(x,0)}{p(x,y(x))}\mathrm{d}x\\&\geqslant -N(d+k)-MN(d+k)\\&\geqslant -2KN(1+M)\end{aligned}$$

于是 $w\leqslant k+2kN(1+M)$，这与 $w>\max\{k+2kN(1+M),\gamma(-k)\}$矛盾，因此，存在 $t_1>t_0$ 使得 T_A^+ 在 $t=t_1$ 时与直线 $x=k$ 相交，且当 $t\in[t_0,t_1]$时 $y(t)>k$，设其交点为 $A_1(k,y_{A1})$，则 $y_{A1}>k$.

下面证明：T_A^+ 必与 x 正半轴相交于 $A_2(x_{A2},0)$在时刻 $t_2>t_1$ 时，且对 $t\in(t_1,t_2]$有 $x(t)>k$.

假若 T_A^+ 对所有 $t>t_1$ 时不与 x 正半轴相交，那么对任意 $t\geqslant t_1$ 有 $y(t)>0$，且当 t 趋于 $+\infty$时，T_A^+ 只可能是以下 3 种情形之一：

i) $x(t)<+\infty,\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=+\infty$

ii) $x(t)\to+\infty,\lim\limits_{t\to-\infty}y(t)=+\infty$

iii) $x(t)\to+\infty,y(t)<+\infty$

根据 C_1 和引理 1，易知情形 i)是不可能的。

若ii)或iii)成立，由 $yp(x,y)>0(y\neq 0)$，有 $x(t)>k$ 对任意 $t>t_1$，对方程(3)沿 T_A^+ 从 k 到 $x\geqslant k$ 积分得

$$\begin{aligned}y(t)&=y_{A1}+\int_{A1}^{x}+\int_{k}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x+\int_{k}^{x}\frac{Q(x,0)}{p(x,y(x))}\mathrm{d}x\\&\leqslant y_{A1}+\int_{k}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,\text{这里 } t\geqslant t_1\end{aligned}$$

由 C_3)及上面不等式可得 $\lim\limits_{t\to-\infty}y(t)<+\infty$，因此ii)不可能。

假若iii)成立，那么存在常数 $C>0$ 使对所有 $t\geqslant t_1$ 有 $0<y(t)\leqslant C$，由 C_2)可选取

$$D > \max \underset{\substack{0\leq x\leq c \\ y\geq k}}{\mathrm{Sup}}\{p(x,y)\},1\}$$

那么,对 $t\geq t_1$ 得

$$y(x) = y_{A1} + \int_k^x f(x,y(x))\mathrm{d}x + \int_k^x \frac{Q(x,0)}{p(x,y(x))}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant y_{A1} + F(x) - F(k) + \frac{1}{D}G(x) - \frac{1}{D}G(k) \tag{4}$$

其中 $F_1(s)=C\int_0^s f(x,y,(x)-\mathrm{d}, G(s)=\int_0^s Q(x,0)\mathrm{d}x$

根据 C_3),存在 $E>0$,对所有 $x\geq k$ 使得 $F(x)E$。另一方面,由 C_7)得存在 $x_0>k$ 使对 $x\geq x_0$。

有 $$F(x)+C(x)\leqslant -Dy_{A1}+DF(k)+C(k)-(D-1)E$$

即 $$G(x)\leqslant -Dy_{A1}+DF(k)+G(k)-(D-1)E-F(X) \tag{5}$$

代入(4)得

$$y(x)\leqslant \frac{D-1}{D}(F(x)-E)<0 \quad 当\ x\geqslant x_0$$

而当 $t\geq t_1$ 时有 $y(t)>0$,这样导出矛盾,因此iii)是不可能的。

于是,T_A^+ 必与 x 正半轴在时刻 $t_2>t_1$ 时相交于 $A_2(x_{A2},0)$,又在 $y>0$ 半平面 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(x,y)>0$,从而当 $t\in(t_1,t_2]$ 时有 $x(t)>k$.

同理,根据引理 1 和 C_1)可证当 t 增加时,在 $y<0$ 的半平面上,T_A^+ 在时刻 $t_3>t_2$ 再交直线 $x=k$ 于 $A_3(k,y_{A3})$.

现在 $x=k$ 上选取点 $B(k,y_B)$ 使 $y_B<-\max\{w,|y_{A3}|\}$,设 T_B^+ 是(1)在时刻 t^* 过点 B 的正半轨,其参数方程为 $x=x^*(t),y=y^*(t)$。像 T_A^+ 类似讨论,可证明 T_B^+ 在时刻 $t_1^*>t_0^*$ 于 $y<0$ 半平面上必交直线 $x=-k$ 于点 $B_1(-k,y_{B1})$,且当 t 继续增加时,T_B^+ 在时刻 $t_2^*>t_1^*$ 交 x 负半轴于点 $B_2(x_{B2},0)(x_{B2}<-k)$,再在时刻 $t_3^*>t_2^*$ 在 $y>0$ 半平面上交直线 $x=-k$ 于点 $B(-k,y_{B3})$,且进一步当 $t\in[t_0^*,t_1^*]$ 时 $y^*(t)<-k$,当 $t\in(t_1^*,t_3^*)$ 时有 $x^*(t)<-k$.

现在进一步证 $y_{B3}<w$

由条件 C_6)在曲线 $y=\gamma(x)$ 上对 $x\leqslant -a$ 时有

$$\frac{Q(x,y)}{p(x,y)}-\frac{\mathrm{d}\gamma(x)}{\mathrm{d}x}\leqslant 0$$

因此,T_B^+ 在 $x\leqslant -a$ 时不能穿过曲线 $y=\gamma(x)$,因而由 $k>a$ 及 $w>\gamma(-k)$ 得 $y_{B3}\leqslant\gamma(-k)<w$。

又因在线段 $\overline{B_3A}$ 上 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$,在线段 $\overline{A_3B}$ 上 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$,所以,根据系统(1)解对初值问题的唯一性知,系统(1)的任一点出发的正半轨都在闭曲线 L:$\widehat{AA_1A_2A_3}\cup\overline{A_3B}\cup\widehat{BB_1B_2B_3}\cup\overline{B_3A}$ 内部,而不能穿过 L 到它的外部去。由于 (x_0,y_0) 位于闭曲线 L 的内部,由此从 x_0,y_0)出发的正半轨有界。

对 C_3)中 $\gamma(x)\in C^1([a,+\infty),R^-)$,考虑坐标变换 $\bar{x}=-x,\bar{y}=-y$ 及 $\bar{t}=t$ 根据前面即可得。定理 1 证毕。

定理 2 的证明

充分性由定理 1 即得。

下面证必要性

反证法。如系统(1)的解均正向有界但 C_7)不成立,不妨设 $x>0$ 时不成立,此时,$\int_0^x Q(s,$

$0)ds$，$\int_0^x f(x,h(s)ds$ 在$[0,+\infty)$上均有界，可设 $\int_0^x Q(s,0)ds>-M$，$\int_0^x f(s,h(s))ds>-M(M>1)$，由 $C_1)\varliminf_{y\to\infty}|p(x,y)|>0$ 知：$\exists\ \gamma>0,k>0$ 对一切 $y\geqslant\gamma$ 均有 $p(x,y)\geqslant k$；由于 $\int_0^x Q(s,0)ds>-M$，故存在 $x_0>c$ 使得 $\int_{x_0}^{+\infty}Q(s,0)ds>-1$，取 $y_0=\gamma+M+\frac{2}{k}$。现证从(x_0,y_0)出发的系统(1)的轨线当 $t\geqslant 0$ 均有 $y>\gamma$，若不然，设 T 为首次使 $y(t)$到达 γ 者，在$[0,T]$上，$y(t)\geqslant\gamma$，此时 $p(x,y)\geqslant k$，由$\frac{dx}{dt}=p(x,y)$及 C_1)知 $x(T)>x(0)$，且由方程(3)得

$$\begin{aligned}y(T)-y(0)&=\int_{x(0)}^{x(T)}f(x,y(x))dx+\int_{x(0)}^{x(T)}\frac{Q(x,0)}{p(x,y(x))}dx\\&\geqslant\int_{x(0)}^{x(T)}f(x,y(x))dx+\frac{1}{k}\int_{x(0)}^{x(T)}Q(x,0)dx\\&\geqslant -M-\frac{1}{k}\end{aligned}$$

又 $y(T)-y(0)=\gamma-(\gamma+M+\frac{2}{k})=-M-\frac{2}{k}$，从而得$-2\geqslant-1$，矛盾，所以从$(x_0,y_0)$出发的轨线，由于 $\dot{x}\geqslant k>0$，得其正半轨是无界的，这与假设矛盾，必要性得证。

定理 3 的证明

由定理 1 知在有界区域 G 中包含一正半轨 γ_A^+，再根据 C_6)和引理 2 即得定理 3 结论。

3 例　子

为了加深对定理理解，下面举几个例子加以说明。

例 1　对任意整数 n，系统

$$\begin{cases}\dot{x}=(2+\sin x)\mathrm{arctg}y\\ \dot{y}=-(2+\sin x)\mathrm{arctg}y\cdot\prod_{i=1}^{n+1}(x^2-i^2)-x\prod_{i=1}^{2n}(x+a_i)\end{cases}\tag{6}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,2n)$是常数

则(6)的所有正半轨有界。

事实上，它满足定理 1 条件，现验证之。

C_1)　$yp(x,y)=(2+\sin x)\cdot y\mathrm{avctg}y>0(y\neq0)$，

$\lim_{y\to\infty}|(2+\sin x)\mathrm{arctg}y|=\frac{\pi}{2}(2+\sin x)>0$

C_2)　当$|x|$充分大时

$-4\mathrm{arctg}|y|\leqslant p(x,y)\leqslant\mathrm{arctg}|y|$

C_3)　$f(x,y)=\frac{Q(x,y)-Q(x,0)}{p(x,y)}$

$=\prod_{i=1}^{n+1}(x^2-i^2)$

于是　$\int_0^{\pm\infty}f(x,y)dx=\mp\infty$

C_4)　显然成立

C_5)　根据附注 2　$\lim_{x\to\infty}f(x,y)<0$，且

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|-x\prod_{i=1}^{2n}(x+a_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n+1}(x^2-i^2)}=0<\sup_{y\in R^+}\{p(x,y)\}$$

从而 C_5） 满足

C_6） 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\prod_{i=1}^{2n}(x+a_i)=+\infty$，因而存在 $N_1>0$，当 $|x|>N_1$ 时，$\prod_{i=1}^{2n}(x+a_i)>1$，于是 $x \overline{\in}[-N,N_1]$ 时，$xQ(x,0)<0$

C_7） 因为 $\int_0^{\pm\infty}Q(x,0)\mathrm{d}x=-\infty$，故 C_7）成立。

由定理 1 得(6)的所有正半轨有界。

例 2 微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{1+e^{-x^2}}\sum_{i=1}^{n}a_iy^{2i+1}\\ \dot{y}=-\dfrac{\operatorname{arctg}|x|\cdot\sum_{i=1}^{n}a_iy^{2i+1}}{(1+e^{-x^2})^4(1+e^{-x^2})(1+x^2)}-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}\end{cases}\tag{7}$$

其中 n 为正整数，$a_i\geqslant0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2>0$，则系统(7)存在无界的正半轨。

用定理 2 证明之，实际上，C_1）、C_2）、C_6）易验证成立，下面说明 C_3）、C_4）、C_5）成立，而 C_7）不满足即可。

$$f(x,y)=\frac{Q(x,y)-Q(x,0)}{p(x,y)}=-\frac{\operatorname{arctg}|x|}{(1+e^{-x^2})^4(1+x^2)}$$

于是易证在 $x\in[0,+\infty)$ 上 $\int_0^x f(s,h(s))\mathrm{d}s$ 有界，在 $x\in(-\infty,0]$ 时，$\int_0^x f(s,h^*(s)\mathrm{d}s)$ 有界，从而 C_3）满足

C_4） $-\dfrac{\operatorname{arctg}|x|}{1+x^2}<f(x,y)<\dfrac{\operatorname{arctg}|x|}{1+x^2}$

C_5） $\overline{\lim\limits_{x\to-\infty}}f(x,y)<0$，且

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|Q(x,0)|}{-f(x,y)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{(1+e^{-x^2})^2(1+x^2)}{\operatorname{arctg}|x|}=0<\sup_{y\in R^+}\{p(x,y)\}$$

由附注 2 知 C_5)成立。

但 $\int_0^{\pm\infty}Q(x,0)\mathrm{d}x=-2$，因而 C_7）不成立，由定理 2 知系统(7)存在无界的正半轨。

例 3 设 $a\geqslant2$，$b>0$，n、m 为非负整数，$k\geqslant1$，则系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y^{2m+1}(k\pi+\operatorname{arctg}y)(a+\sin x)\\&\dot{y}=-y^{2m+1}\prod_{i=1}^{2n+1}(x^2-i^2)-bx(1+y^{2m})\end{aligned}\tag{8}$$

至少有一个稳定极限环，且所有正半轨有界。

考虑(8)的等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{y^{2m-1}}{1+y^{2m}}(k\pi+\operatorname{arctg}y)\end{cases}$$

$$\dot{y} = -\frac{y^{2n+1}}{1+y^{2n}}\prod_{i=1}^{2n-1}(x^2-i^2)/(a+\sin x) - \frac{bx}{a+\sin x} \tag{9}$$

下证(9)满足定理 3 条件，事实上，易知 C_1)，C_2)，C_6)成立，现验证其余条件

$$f(x,y) = \frac{Q(x,y)-Q(x,0)}{p(x,y)}$$

$$= -\prod_{i=1}^{2n+1}(x^2-i^2)/[k\pi+\operatorname{arctg}y)(a+\sin x)]$$

明显地 $\int_0^{\pm\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \mp\infty$，从而 C_3) 满足。

C_4)亦满足

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,y) < 0$，且

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|Q(x,0)|}{-(x,y)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{b|x|(k\pi+\operatorname{arctg}y)}{\prod_{i=1}^{2n+1}(x^2-i^2)}$$

$$< \sup_{y\in R^+}\{p(x,y)\}$$

根据附注 2 知 C_5)成立。

显然 $\int_0^{\pm\infty} Q(x,0)\mathrm{d}x = -\infty$，从而 C_7) 满足

再由原点是唯一奇点，且当 $0<|x|、|y|\ll 1$ 时有 $f(x,y)>0$，且 $x[p,y)-p(0,y)]=0$，由附注 4 得 C_8)成立，又根据附注 5 知系统(9)至少有一个稳定极限环，且所有正半轨有界。因而得系统(8)满足例 3 结论。

参 考 文 献

1 Huang Lihong, Yu Jianshe. On boundedness of solutions of generalized Lienard's systam and its application. Ann. Diff Eqs, 1993, 9(3): 311～318

2 Villari G. Periodic solutions of Lienard's equation. J. Math. Anal. Appl, 1982, 86: 379～382

3 王联，王慕秋. 非线性常微分方程定性分析. 哈尔滨工业大学出版社，1987，143～222

4 叶彦谦. 极限环论. 上海：上海科学技术出版社，1984，1～105

5 张芷芬等，微分方程定性理论. 北京：科学出版社，1985，196～384

6 Villari G. On the qualitative behaviour of solutions of Lienard equation. J. Differential Equations, 1987, 67: 269～277

7 Huang Lihong, Yu Jian She, Qian Xiang Zheng. Boundedness solutions and existence of periodic solutions for autonomous planar system. Ann. of Diff. Eqs., 1993, 9(4): 425～432

8 Sadquist A & Andersen K M. A necessary and sufficient for the axistence of unique nontrivial periodic solution to a class of equations of Lienard type. J. Diff. Eqs., 1982, 46: 356～378

9 韩茂安. 一类非线方程的有界性. 高校应用数学学报，1989，4(2)：258～265

10 孙继涛. Lienard 系统解的有界性与极限环的存在性. 高校应用数学学报，1992，7(2)：184～191

11 周毓荣，邓晋宜. Dulac 函数在研究极限环个数中的应用. 数学年刊，1992，13A(6)：692～698

12 李森林，黄立宏. 平面自治系统极限环的存在性及解的有界性. 湖南大学学报，1993，20(1)：1～8