60-63

1997 年 7 月　　重庆大学学报　（自然科学版）　　Vol. 20, №. 4
第 20 卷第 4 期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Jul. 1997

(11)

二次曲线 Chebyshev 法向逼近的交换算法*

An Exchange Algorithm for the Best Chebyshev Normal Approximation by Quadratic Curves

龚 劬
Gong Qu

（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，630044；33 岁，女，讲师，博士生）

O241.5

摘　要　以机械曲线的逼近为背景，建立了符合机械上误差度量标准的逼近模型即法向一致逼近问题，推出了最佳法向一致逼近二次曲线的特征，给出了一个算法，并对其收敛性进行了讨论，最后将此法用于齿轮齿廓的二次曲线逼近，其误差低于 0.8 μm.

关键词　切比雪夫逼近；一致逼近；逼近误差；算法；收敛　曲线逼近

中国图书资料分类法分类号　O241.5

ABSTRACT　According to the criterion of measuring profile error, a mathematical model for the best approximation to profile of gear is presented; the characteristic of the best quadratic curve approximation is derived. An algorithm and its convergence are discussed. Finally, the quadratic curve approximations to the profiles of many gears are obtained efficiently by the algorithm. The approximation errors are less than 0.8 micrometers.

KEYWORDS　chebyshev approximation; uniform approximation; approximate error; algorithms; convergence

0　引　　言

曲线逼近广泛应用于机械零件的设计与加工，如齿轮刀具设计与成形磨齿修整器的设计。由于对理论齿形的制造有时较为困难，且效率低、成本高，所以常用较易制造的齿形来近似代替理论齿形以达到高效、经济的目的。常用的替代曲线有圆弧[1]，圆弧蜕变线、椭圆、双曲线[2]、环面截线等**。按机械上的误差测量标准，其误差是最大法向误差。因此，一般目标函数表达式均较复杂，是非线性连续的 chebyshev 逼近问题。解线性的 chebyshev 逼近问题较有效的方法是交换算法[3]，一般说来，收敛速度可达二阶。

1　建立数学模型

设理论曲线 Γ 为：$r = r(t), t \in [a,b]$，逼近曲线 Γ_* 为：$a_1x^2 + a_2xy + z_3y^2 + a_4x + a_5y +$

* 收文日期　1996-09-20

** 染锡昌等．见：成形磨法论文集．重庆大学，1984

$a_6 = 0$，Γ_a 的参数方程可写为：

$$r = r(t) + u_a(t)n(t) \overset{\text{记为}}{=\!=} r(t,a)$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_6)^T$，$n(t)$ 为 Γ 的单位法矢。

按机械零件的误差测量标准得如下逼近模型：

$$\min_{a\in R^6} \max_{t\in[a,b]} |(r(t) - r(t,a)) \cdot n(t)| \tag{1}$$

定义 1　问题(1)的解 Γ_{a^*} 称为 Γ 的最佳法向一致逼近。

理论曲线 Γ 的最佳法向一致逼近的特征定理以及 $|(r(t) - r(t,a)) \cdot n(t)|$ 达极值的充要条件在文献[4]中已给出。

2　逼近方法及其收敛性

为叙述方便，先引入如下定义：

定义 2　称满足 $a \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_5 \leqslant b$ 的 6 个点 $\{t_i, i = 0,1,\cdots,5\}$ 为参考点。

单点交换算法分 4 步：

1) 取初始参考点 $\{t_i, i = 0,1,\cdots,5\}$，令 $k = 1$

2) 确定绝对值最小的 h_k 使过 6 个点 $r(t_i) + (-1)^i h_k n(t_i)(i = 0,1,\cdots,5)$ 的二次曲线存在

3) 构造过 $r(t_i) + (-1)^i h_k n(t_i)(i = 0,1,\cdots,5)$ 的二次曲线：$r = r(t,a_k)$

4) 求出使误差 $|(r(t) - r(t,a_k)) \cdot n(t)|$ 达最大的点 ξ，若 $|h_k|$ 与最大误差相当接近，则停止；否则用 ξ 取代参考点中的某个 t_{i_k} 使得到的新参考点 $\{t_i, i = 0,1,\cdots,5\}$ 满足 $\{(r(t_i) - r(t_i,a_k)) \cdot n(t_i), i = 0,1,\cdots,5\}$ 正负交错，令 $k = k+1$，转 2)。

为加速收敛，可将第 4 步改为：求出 $|(r(t) - r(t,a_k)) \cdot n(t)|$ 的所有大于 $|h_k|$ 的局部极值点，用它们取代参考点中的某些点，使得到的新参考点满足 $\{(r(t_i) - r(t_i,a_k)) \cdot n(t_i), i = 0,1,\cdots,5\}$ 正负交错。称它为多点交换算法。

引理 1　设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑的平面曲线，则单点(或多点)交换算法得到的 $\{h_k\}$ 严格单增。

利用两二次曲线最多 4 个交点容易证明。

引理 2　设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑的平面曲线，$r = r(t,a^*), t \in [a,b]$ 是最佳法向一致逼近，则在单点(或多点)交换算法的各次迭代中有：

1) $|h_k| \leqslant \| (r(t) - r(t,a^*)) \cdot n(t) \|_\infty \leqslant \| r(t) - r(t,a_k)) \cdot n(t) \|_\infty$；

2) $\{h_k, k = 1,2,\cdots\}$ 同号。

由引理 1 和引理 2，可见 $\{h_k\}$ 单调、有界，从而有如下定理：

定理 1　设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑平面曲线，则由单点(或多点)交换算法所得的序列 $\{h_k\}$ 收敛。

定理 2　设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑平面曲线，则在单点交换算法中每次迭代适当选取二次曲线 $\Gamma_{a_k}: a_1^{(k)}x^2 + a_2^{(k)}xy + a_3^{(k)}y^2 + a_4^{(k)}x + a_5^{(k)}y + a_6^{(k)} = 0$ 的系数 $a_i^{(k)}$，可使 $\{a_i^{(k)}\}(i = 1,2,\cdots,6)$ 收敛。

证明　记 i_k 为第 k 次迭代替出的参考点的脚标，则：

$$t_{i_0}^{(k+1)} \neq t_{i_0}^{(k)} \qquad t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)} \qquad (i \neq i_0)$$

记

$$(u_i^{(k)}, v_i^{(k)}) = r(t_i^{(k+1)}) + (-1)^i h_k n(t_i^{(k+1)}) (i \neq i_0, i = 0,1,\cdots,5)$$

$$(u_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}) = r(t_i^{k+1}) + (-1)^i h_k n(t_i^{(k+1)}) (i \neq i_0, i = 0,1,\cdots,5)$$

则 $a_i^{(k)}, a_i^{(k+1)} (i = 1,2,\cdots,6)$ 分别是如下两个齐次方程组的非零解

$$a_1^{(k)}[u_i^{(k)}]^2 + a_2^{(k)} u_i^{(k)} v_i^{(k)} + a_3^{(k)}[v_i^{(k)}]^2 + a_4^{(k)} u_i^{(k)} + a_5^{(k)} v_i^{(k)} + a_6^{(k)} = 0 \tag{2}$$

$$(i \neq i_0, i = 0,1,\cdots,5)$$

$$a_1^{(k+1)}[u_i^{(k+1)}]^2 + a_2^{(k+1)} u_i^{(k+1)} v_i^{(k+1)} + a_3^{(k+1)}[v_i^{(k+1)}]^2 + a_4^{(k+1)} u_i^{(k+1)} + a_5^{(k+1)} v_i^{(k+1)} + a_6^{(k+1)} = 0 \tag{3}$$

$$(i \neq i_0, i = 0,1,\cdots,5)$$

分别用 $d_j^{(k)}, d_j^{(k+1)}$ 记(2)，(3)的系数矩阵去掉第 j 列所得方阵的行列式，$(j = 1,2,\cdots,6)$，则可取

$$\begin{cases} a_j^{(k)} = (-1)^j d_j^{(k)} \\ a_j^{(k+1)} = (-1)^j d_j^{(k+1)} \end{cases} \qquad (j = 1,2,\cdots,6) \tag{4}$$

从而：$a_j^{(k)}$ 与 $a_j^{(k+1)}$ 分别是 h_k 与 h_{k+1} 的系数相同的多项式，∴∃ $M > 0, \forall k$ 均有：

$$|a_j^{(k+1)} - a_j^{(k)}| \leqslant M|h_{k+1} - h_k| = M(|h_{k+1}| - |h_k|)$$

∵ $\{|h_k|\}$ 收敛

∴ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_j^{(k+1)} - a_j^{(k)}| = M \sum_{k=1}^{\infty} (|h_{k+1}| - |h_k|)$ 收敛

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} (a_j^{(k+1)} - a_j^{(k)})$ 收敛

∴ $\{a_j^{(k)}\}$ $j = 1,2,\cdots,6$ 收敛 证毕。

定理 3 设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑的平面曲线，$r = r(t, a^*)$ 是 $\Gamma: r = r(t, a_k)$ 的最佳法向逼近二次曲线，则对单点交换算法产生的二次曲线列 Γ_{a_k} 有：

$$\lim_{k\to\infty} \| (r(t) - r(t, a_k)) \cdot n(t) \|_\infty = \lim_{k\to\infty} |h_k| = \| (r(t) - r(t, a^*)) \cdot n(t) \|_\infty$$

证明：记 i_0 为第 k 次迭代替出的参考点的脚标

$$(-1)^{i_0} h_{k+1} = [r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_{k+1}) - r(t_{i_0}^{(k+1)})] \cdot n(t_{i_0}^{(k+1)})$$

$$= [r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_k) - r(t_{i_0}^{(k+1)})] \cdot n(t_{i_0}^{(k+1)}) + [r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_{k+1}) - r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_k)] \cdot n(t_{i_0}^{(k+1)})$$

令 $\triangle_k = [r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_{k+1}) - r(t_{i_0}^{(k+1)}, a_k)] \cdot n(t_{i_0}^{(k+1)})$

则 $$(-1)^{i_0} h_{k+1} = \varepsilon \| (r(t) - r(t, a_k)) \cdot n(t) \|_\infty + \triangle_k \qquad (\varepsilon = 1 \text{ 或 } -1) \tag{5}$$

由 a_k 收敛，可得 $\lim_{k\to\infty} \triangle_k = 0$

在式(5)两边同减 $(-1)^{i_0} h_k$ 可得：

$$|h_{k+1} - h_k| \geqslant \big| \| (r(t) - r(t, a_k)) \cdot n(t) \|_\infty - |h_k| \big| - |\triangle_k|$$

令 $k \to \infty$，由引理 2 即得：

$$\lim_{k\to\infty} |h_k| = \lim_{k\to\infty} \| (r(t) - r(t, a_k)) \cdot n(t) \|_\infty = \| (r(t) - r(t, a^*)) \cdot n(t) \|_\infty$$

由定理 3 及定理 2 立即可得：

定理 4 设 $\Gamma: r = r(t), t \in [a,b]$ 是光滑平面曲线，则单点交换算法得出的二次曲线 $\Gamma_{a_k}: a_1^{(k)} x^2 + a_2^{(k)} xy + a_3^{(k)} y^2 + a_4^{(k)} x + a_5^{(k)} y + a_6^{(k)} = 0$；($a_i^{(k)}$ 的选取如式(4)的极限曲线 $\Gamma_{a^*}: a_1^* x^2$

$+ a_2^* xy + a_3^* y^2 + a_4^* x + a_5^* y + a_6^* = 0$ 为 Γ 的最佳法向一致逼近，其中 $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i^*$，$(i = 1, 2, \cdots, 6)$.

3　应用实例

将上述算法用于渐开线齿轮齿形曲线的二次曲线逼近，算出了十几种型号的渐开线齿轮齿形曲线的逼近二次曲线，其逼近误差均小于 0.8 μm，满足要求。从这些计算实例来看，一般三四次迭代就能使 $|h_k|$ 与 $\| (r(t) - r(t, a_k)) \cdot n(t) \|_\infty$ 相差小于 3×10^{-5} mm，可见，收敛速度快，计算结果见附表。

附表　用交换算法对渐开线齿轮齿形曲线的二次曲线逼近结果

齿轮型号	逼近曲线：$a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+10=0$　(mm)					逼近误差
$m\times Z\times\alpha$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	μm
1×20×20	0.114 864 4	−0.248 235 3	0.235 352 4	−2.143 57	2.107 671	0.29
1×30×20	0.0612 878 2	−0.106 023 3	0.102 442	−1.432 413	1.328 447	0.08
1×32×20	0.045 094 92	−0.093 154 37	0.090 428 83	−1.343 156	1.243 894	0.06
1×36×20	0.035 663 32	−0.072 855 53	0.0708 055 3	−1.194 476	1.090 361	0.05
1×40×20	0.028 914 71	−0.058 076 69	0.056 198 42	−1.075 548	0.0961 014 3	0.03
1×50×20	0.018 522 51	−0.036 977 6	0.036 018 7	−0.860 844 7	0.762 687 4	0.02
1×56×20	0.014 770 82	−0.029 498 82	0.028 897 36	−0.768 739	0.680 941 7	0.02
1×60×20	0.012 875 75	−0.025 205 33	0.024 378 55	−0.717 737 4	0.622 208	0.01
1×70×20	$9.471\,611\times10^{-3}$	−0.018 077 76	0.017 298 182	−0.615 597 7	0.515 086 3	0.01
1×80×20	$7.258\,419\times10^{-3}$	−0.013 507 89	0.012 726 2	−0.638 902 4	0.436 742	0.02
1×100×20	$4.629\,844\times10^{-3}$	-9.4465×10^{-3}	$9.423\,825\times10^{-3}$	−0.433 86	0.391 267 6	0.01
1×120×20	$3.262\,973\times10^{-3}$	$-4.536\,54\times10^{-3}$	$3.531\,694\times10^{-3}$	−0.361 374 1	0.197 371 7	0.01
2×17×20	$3.972\,644\times10^{-2}$	$-8.361\,097\times10^{-2}$	$7.684\,997\times10^{-2}$	−1.260 614	1.203 01	0.78
2×25×20	$1.842\,753\times10^{-2}$	$-3.900\,92\times10^{-2}$	$3.756\,335\times10^{-2}$	−0.858 592 9	0.820 804 1	0.28
2×35×20	$9.430\,244\times10^{-3}$	$-1.933\,807\times10^{-2}$	$1.881\,137\times10^{-2}$	−0.614 224 4	0.563 391 4	0.09
2×70×20	$2.367\,903\times10^{-3}$	$-4.519\,441\times10^{-3}$	$4.324\,56\times10^{-3}$	−0.307 798 9	0.257 543 1	0.03
4×35×20	$2.357\,914\times10^{-3}$	$-4.816\,634\times10^{-3}$	$4.676\,703\times10^{-3}$	−0.307 135 6	0.280 380 5	0.18
4×50×20	$1.157\,657\times10^{-3}$	-2.3111×10^{-3}	$2.251\,169\times10^{-3}$	$-2.152\,112\times10^{-1}$	0.190 646 9	0.10

参 考 文 献

1　钱文瀚．渐开线齿廓的近似圆弧．机械工程学报，1983，19(1)：58～67

2　梁锡昌．两种新的成形磨齿法．机床，1983，(4)：19～23

3　Powell M J D. Approximation theory and methods. London：Combridge University Press，1981. 85～111

4　龚劬．二次曲线最佳法向逼近的插值点优化迭代法．高等学校计算数学学报，1995，17(3)：223～229