

① 63-67

一种简化的小波去噪算法

TN911.6

A Simplified Denoising Algorithm with Wavelet Transform

0174.22

陈东义	曹长修	朱冰莲	周建伟
Chen Dongyi	Cao Changxiu	Zhu Binglian	Zhou Jianwei

(重庆大学自动化系, 重庆, 400044; 第一作者 40岁, 男, 副教授, 博士生)

摘要 介绍了信号奇异性及正则性的数学概念以及如何利用小波变换测量信号的奇异性及正则性。介绍了小波去噪原理及优越性, 提出一种简单、实用的小波去噪方法。

关键词 噪声控制; 滤波 / 小波变换

中国图书资料分类法分类号 TN713

信号分析, 正则性, 奇异性

ABSTRACT This article explains the mathematical characterization of singularities with Lipschitz exponents and how to compute Lipschitz exponents. The principle and advantage of denoising with wavelet are reviewed. At last, a new simplified practical denoising algorithm is given.

KEYWORDS noise control; filter / wavelet transform

0 引言

传统的滤噪方法是将被噪声污染的信号通过一个滤波器, 滤掉噪声频率成分。但对于短时瞬态信号、非平稳过程信号、含宽带噪声信号, 采用传统方法处理有着明显的局限性。小波变换具有可进行时频局部分析的特点, 所以小波变换方法可更有效地处理信号, 具有传统方法不可比拟的、非常灵活的对奇异特征提取及时变滤波等功能, 可在低信噪比的情况下进行有效滤噪并检测信号的波形特征。本文提出了一种简化的去噪算法, 该算法省去了用 Ad-hoc 算法寻找极大值曲线及利用投影算法重构小波变换的步骤, 使得算法简单, 易于实现, 计算效率高, 而去噪效果较好。

1 小波变换与信号奇异性、正则性

数学上用奇异性反映信号的不规则程度, 用正则性反映信号的规则及光滑程度。

1.1 信号奇异性、正则性的刻划

定义 1 1) 设 n 为非负整数 $n \leq \alpha \leq n+1$, 称一个函数 $f(x)$ 在 x_0 点为 Lipschitz α , 当且仅当存在两个常数 A 和 $h_0 > 0$, 及一个 n 阶多项式 $P_n(x)$, 使得对于 $h < h_0$, 有式 $|f(x_0+h) - P_n(h)| \leq A|h|^\alpha$ 成立。2) 称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上为一致 Lipschitz α 的, 当且仅当对任意 $x_0, x_0+h \in (a, b)$, 式 $|f(x_0+h) - P_n(h)| \leq A|h|^\alpha$ 都成立。3) 称 α_0 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的 Lipschitz

正则, 如果 α_0 是使 $f(x)$ 为 Lipschitz α 的所有 α 的上确界。1) 称 $f(x)$ 在 x_0 处是奇异的, 如果 $f(x)$ 在 x_0 处不是 Lipschitz 1。

从定义 1 可知, 若一个函数在一点 x_0 处连续可导, 则它在 x_0 处是 Lipschitz 1 的。若 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 导数有界, 但不连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点仍是 Lipschitz 1 的, 即 $f(x)$ 在 x_0 处不是奇异的。如果 $f(x)$ 是 Lipschitz $\alpha, \alpha > n$, 那么可以证明 $f(x)$ 在 x_0 处是 n 阶可导的, 且多项式 $p_n(h)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处展开的泰勒级数的前 $n+1$ 项。Lipschitz 正则 α_0 给出了函数 $f(x)$ 可导性的更精确指标。如果函数 $f(x)$ 的 Lipschitz 正则 α_0 满足 $n < \alpha_0 < n+1$, 那末可知 $f(x)$ 在 x_0 处 n 次可导, 但它的 n 阶导数在 x_0 处是奇异的, 且 α_0 刻划了这个奇异性。函数 $f(x)$ 的 Lipschitz 正则 α_0 越大, 则 $f(x)$ 越光滑。若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 但有界, 则 $f(x)$ 的 Lipschitz 正则 $\alpha_0 = 0$ 。若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但不可导, 其 Lipschitz 指数为 $0 < \alpha < 1$ 。

定义 2 设 $f(x)$ 是一有限阶调和分布函数, 又设 α 是一个非整实数, 且闭区间 $[a, b] \in R$, 称分布 $f(x)$ 在 (a, b) 上是一致 Lipschitz α 的, 当且仅当它的原函数在区间 (a, b) 上是一致 Lipschitz $\alpha+1$ 的。

由定义 2 可知, 一个 Dirac 函数在 0 点附近是 Lipschitz α 的, $\alpha < -1$ 。一个 Dirac 分布在 0 附近的一致 Lipschitz 正则等于 -1 。

1.2 信号奇异性的判断

判断信号 $f(x)$ 的奇异性主要是通过测量它的 Lipschitz 正则进行的。测量函数 $f(x)$ 的 Lipschitz 正则的经典方法是观察其富氏变换 $\hat{f}(\omega)$ 的渐近衰减性。对此, 有如下定理。

定理 1 一个有界函数 $f(x)$ 在整个 R 上是一致 Lipschitz α , 如果 $f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^\alpha) d\omega < +\infty \quad (1)$$

该式给出了整个实轴上的一个全局正则条件, 但不能由它确定 $f(x)$ 在一点 x_0 是否更正则。由于小波变换给出了一个关于 $f(x)$ 的局部化信息, 人们自然会联想到利用 $f(x)$ 的小波变换去测量其 Lipschitz 正则, 对此有如下定理 2 给出的结论^[1]。

定理 2 假设小波 $\psi(x)$ 连续可导、实值, 具有紧支集。设 $f(x) \in L^2(R), [a, b] \in R$, 又设 $0 < \alpha < 1$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在区间 $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ 上是一致 Lipschitz α 的, 当且仅当, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个常数 A , 使得对于 $x \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ 及 $s > 0$, 有下式成立:

$$|Wf(s, x)| \leq A_s^\alpha \quad (2)$$

该定理将在小尺度上 $f(x)$ 的小波变换的渐近衰减与局部 Lipschitz 正则联系起来, 可以证明(2)是 $s \rightarrow 0$ 时 $|Wf(s, x)|$ 渐近衰减的条件。可将定理 2 推广到 $\alpha < 0, \alpha > 1$ 的情况: 如果小波 $\psi(x)$ 具有 n 阶消失矩, 那末定理 2 对于任意非整数值 α ($0 < \alpha < n$) 仍成立。对于 $\alpha < 0$ 且 $\alpha \in Z$, 定理 2 也能有效地刻划一致 Lipschitz 指数^[1]。在这种情况下不要求小波 $\psi(t)$ 具有高于一阶的消失矩。定理 2 给出的是由小波变换对 $f(x)$ 在一个区间上的 Lipschitz 正则刻划, 不是点上的。可以证明^[1], 在一定的条件下, 用小波变换也可估计函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的 Lipschitz 正则。由上述讨论可知, 在满足一定条件下, 非严格地讲, 小波变换模满足下面形式

的不等式 $|Wf(s, x)| \leq AS^{\alpha}$, 这等价于 $\log |Wf(s, x)| \leq \log(A) + \alpha \log(s)$, 由此可得出小波变换模在不同 α 情况下随尺变化有如下规律: $\alpha > 0$, s 增加, $|W_{2^j}f(x)|$ 增加, α 越大 $|W_{2^j}f(x)|$ 增加越快. $\alpha = 0$, s 增加, $|W_{2^j}f(x)|$ 不变. $\alpha < 0$, s 增加, $|W_{2^j}f(x)|$ 减小. 一般来讲, 根据小波变换模在随尺度增加(或减小)的变化情况就可大致判断信号在某个区间或某点的奇异性及对应 Lipschitz 指数的取值范围.

1.3 Lipschitz 正则的计算方法

方法 1 采用二进小波变换, 在一给定的 $j > 1$ 的尺度范围内, 通过使 $|W_{2^j}f(x)| \leq A2^{\alpha}$ 式中的 $A2^{\alpha}$ 最佳逼近 $|W_{2^j}f(x)|$ 计算指数 α 及常数 A . 该求解可归结为如下的极小化问题:

$$\min E(\alpha, A) = \min \{ \sum (\alpha_j - A2^{\alpha_j})^2 \}, \text{ 其中 } \alpha_j = |W_{2^j}f(x)|_{\epsilon_j} \quad (3)$$

方法 2 根据小尺度上相邻两尺度上的二进小波变换的比值按下式近似求解 α

$$\frac{|W_{2^j}f(x)|}{|W_{2^{j+1}}f(x)|} \cong \frac{A2^{\alpha}}{A2^{(\alpha-1)\alpha}} = 2^{-\alpha} \quad \alpha \cong -\lg \left| \frac{W_{2^j}f(x)}{W_{2^{j+1}}f(x)} \right| \quad (4)$$

这种方法计算 α 不很准确, 也不够稳定, 但在本文的去噪算法中却表现出较满意的效果.

2 一种简化的去噪算法

小波去噪的基本思想是根据噪声与信号在各尺度(即各频带)上的小波谱具有不同的表现这一特点, 将各尺度上由噪声产生的小波谱分量, 特别是将那些噪声小波谱占主导地位的尺度上的噪声小波谱分量去掉, 这样保留下来的小波谱基本上就是原信号的小波谱, 这一过程可称为小波谱的重构或还原. 然后再利用小波变换重构算法, 重构出原信号. 由此可知小波去噪的关键是如何滤去由噪声产生的小波谱分量.

2.1 白噪声的小波变换特征

定理 3 设 $n(x)$ 是实的、宽平稳白噪声, 其方差为 σ^2 , 那么白噪声的小波变换 $W_n(s, x)$ 的期望值

$$E(|W_n(s, x)|^2) = \frac{\| \Psi \|^2 \sigma^2}{s} \quad (5)$$

该定理说明, $E(|W_n(s, x)|^2)$ 的衰减正比于 $1/s$, 即随尺度的增加白噪声的小波变换幅值平均减小.

定理 4 若白噪声 $n(x)$ 是高斯白噪声, 在尺度 s 上, 其小波变换模的平均密度为

$$d_s = \frac{1}{s\pi} \left(\frac{\| \Psi^{(2)} \|^2}{2 \| \Psi^{(1)} \|^2} + \frac{\| \Psi^{(1)} \|^2}{\| \Psi \|^2} \right) \quad (6)$$

式中 $\Psi^{(1)}(x)$ 及 $\Psi^{(2)}(x)$ 分别是 $\Psi(x)$ 的一阶及二阶导数.

该定理说明白噪声的小波变换模值的平均密度正比于 $1/s$, 即随尺度 s 增大, 其密度减小。另外还可以证明高斯白噪声是一致 Lipschitz $-1/2 - \varepsilon$ 的分布, $\varepsilon > 0$ 。由此可见离散白噪声是几乎处处奇异。由定理 3 及定理 4 可知, 随着尺度增加, 白噪声的小波谱将逐渐消失, 如图 1 所示。

2.2 简化去噪方法

由上面的分析可知, 随着尺度的增加, 白噪声的小波谱将逐渐消失, 而有效信号的小

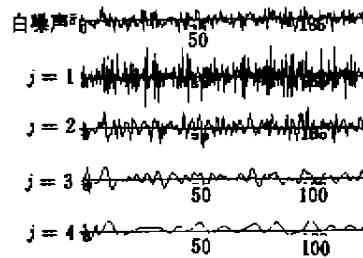


图 1 噪声及其 1~4 尺度上的小波变换化

波变换在大尺度上仍有清楚表现。因此, 通过观察信号与噪声小波谱模值随尺度增加(或减小)的演变, 就可区分由白噪声及由信号各自产生的变换模值。如果当 s 减少时, 小波变换模幅值急剧增加, 说明其相应的奇异性具有负 Lipschitz 指数, 这些模值主要由白噪声产生, 应该去掉。正是由于这个特征, 为采用小波变换方法滤去白噪声奠定了基础。由图 1 可见白噪声的小波谱主要表现在 2^1 尺度与 2^2 尺度上。因此, 我们可先去掉 $2^1, 2^2$ 尺度上的小波变换, 然后用式 $W_{2^j}f(x) = W_{2^{j-1}}f(x) * 2^{-\alpha}$ 恢复小尺度上的小波变换。考虑到在某些点上或其邻域, 噪声小波谱幅值相对较大时, 即使在较大尺度上 ($j > 2$), 这些位置上的噪声的小波变换分量仍占一定优势, 若按这些点上的 Lipschitz 指数 α 恢复出小尺度上小波谱, 又会将一部份残余噪声小波谱分量恢复。对于这种情况可采取如下方法处理: 首先选定一个阈值(见算法部分), 在最大尺度上将小于阈值的小波变换模值去掉, 然后以此为基础来重建小尺度上的小波变换。算法简介如下:

1) 用 Mallat 快速算法^[2] 求出含噪信号在各尺度 $j(j=1, 2, \dots, J, \text{一般取 } J \leq 4)$ 上的小波变换:

$$S_{2^j}f(x) = \sum_{i \in I} h_i S_{2^{j-1}}f(x - 2^{j-1}l), \quad W_{2^j}f(x) = \sum_{i \in I} g_i S_{2^{j-1}}f(x - 2^{j-1}l)$$

2) 求取阈值 $T_0 = C \cdot \frac{M}{J}$, M 为最大尺度 2^J 上的最大幅值, C 为一常数。

3) 在最后一个尺度 $j=J$ 上, 将 $|W_{2^j}f(x)| < T_0$ 处的小波变换值全部去掉(即令其为零), 因为这些点上噪声的小波变换分量仍有影响。

4) 若 $|W_{2^j}f(x)| > T_0$, 则按下式近似求出相应 x 点的 Lipschitz 指数。

$$\alpha = \log_2 \left| \frac{W_{2^{j+1}}f(x)}{W_{2^j}f(x)} \right|$$

一般取 $j=3$ 或 4 , 若某点 x 处的 $\alpha < 0$ (或者 $\alpha < -0.5$), 则令 $\alpha = 0$ 。

5) 将 $1 \dots J-1$ 尺度的小波变换全部去掉。

6) 由最后一个尺度 $j=J$ (或 $j=J-1$) 的小波变换, 用下式重新构造出 $j=J-1, \dots, 1$ 尺度上小波变换:

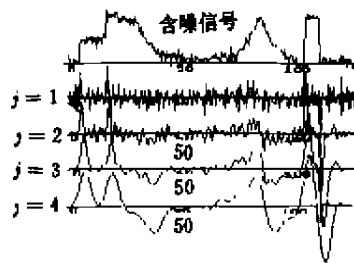


图 2 含噪声信号及其小波变换

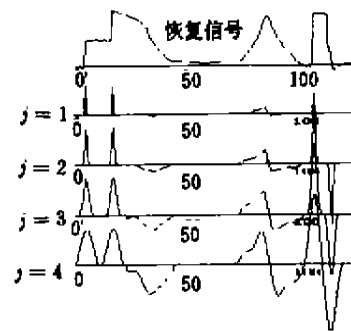


图 3 按上述方法去噪后的信号及恢复的小波变换

$$W^{2^j} f(x) = W^{2^{j-1}} f(x) * 2^{-j}$$

7) 由重建的小波变换经小波逆变换恢复去噪后信号:

$$S_{2^j}^{-1} f(x) = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(x - 2l) S_{2^j} f(x) + 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(x - 2l) W_{2^j} f(x)$$

图 2 ~ 4 给出由该算法进行去噪的实例。

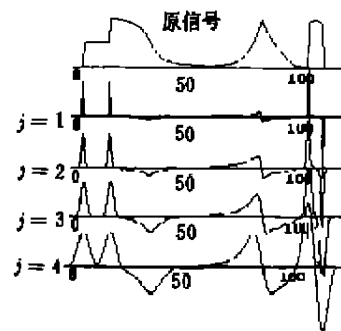


图 4 原信号及其小波变换

3 结 论

由于小波同时具有时、频局域性,所以就可根据信号的小波谱分析信号的局部正则性。根据噪声及干扰的局部正则性与正常信号的局部正则性不同,表现在其小波谱幅值随尺度增加的变化有差异的特点,以及从小波谱上可观测到噪声及干扰主要集中在哪些尺度的哪些时段,从而就可采用小波变换方法非常灵活地构成时、频两域上的滤波器,可在时、频两域上进行去噪与去干扰,这是小波去噪的突出优点。

参 考 文 献

- 1 Stephane Mallat, Wen Liang Hwang. Singularity Detection and Processing with Wavelets. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2), 617~643
- 2 Stephane Mallat, Sifen Zhong. Characterization of Signals from Multiscale Edges. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(7); 1019~1033