·工程应用·

9

49-52

平行共轴载流圆线圈间的磁力计算*

Calculation of Magnetic Force Between Two Parallel Coaxial Circular Coils Carrying Currents

O441.3

向裕民
Xiang Yumin
（四川轻化工学院基础部，自贡，643033；52岁，男，副教授）

摘　要　由诺依曼公式借助椭圆积分计算二平行共轴圆线圈间的互感系数，利用虚功原理获得此二载流线圈间相互作用的磁力，并对磁力的性质加以讨论和图示。

关键词　自感系数；磁力；虚功原理；椭圆积分　　载流线圈
中国图书资料分类法分类号　O441

ABSTRACT　The coefficient of mutual induction between two parallel coaxial circular coils carrying currents are calculated by Neumann's formula with elliptic integrals. The magnetic force between them are gained by employing the principle of virtual work. The property of the force is discussed and illustrated.

KEYWORDS　coefficient of mutual induction; magnetic force; principle of virtual work; elliptic integrals

0　引　　言

二平行共轴载流圆线圈间的磁力在电磁理论研究、工程装置及实验设备上都有广泛运用。该力通常采用近似计算而在高精度精确场合下不能满足需要，准确计算这一磁力具有理论和工程价值。

首先运用诺依曼公式在椭圆积分的基础上得到二平行共轴圆线圈间的互感系数，再借助虚功原理获得二载流线圈间磁力的准确表达式。分析和图示该力的特性，并将磁偶极子作为特殊情况讨论。

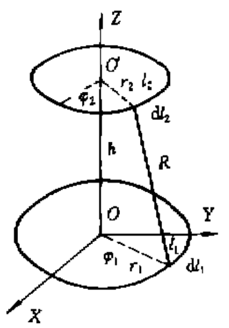

图1　二平行共轴载流圆线圈

1　互　　感

图1为二平行共轴载流圆线圈，线圈平面垂直

* 收文日期　1997-05-13

于轴 OO′. 对下线圈其半径、圈数和载流分别为 r_1、N_1 和 I_1. 对上线圈分别为 r_2、N_2 和 I_2. 两线圈平面间距离为 $OO' = h$,电流 I_1 和 I_2 有相同流向。

记上下线圈一匝上的线元分别为 dl_2 和 dl_1,二线元相距 R,依据诺依曼公式[1] 两线圈间的互感系数为

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{L_2}\oint_{L_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R}$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2 r_1 r_2}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{h^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} d\varphi_1 d\varphi_2 \tag{1}$$

若在(1)式中引用下述变换

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi) \tag{2}$$

并考虑被积函数的周期性,则有

$$M = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 r_1 r_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{\frac{1}{2}(\pi - \varphi_2)}^{\frac{1}{2}(3\pi - \varphi_2)} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{h^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos 2\theta}} d\theta$$

$$= -\mu_0 N_1 N_2 r_1 r_2 \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{h^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos 2\theta}} d\theta \tag{3}$$

$$= 2\mu_0 N_1 N_2 r_1 r_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2\theta - 1)}{\sqrt{h^2 + (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \sin^2\theta}} d\theta$$

运用椭圆积分[2] 可得

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \sqrt{r_1 r_2}}{k}\left[(1 + k'^2)K(k) - 2E(k)\right] \tag{4}$$

式中 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一和第二类完全椭圆积分,模数 k 为

$$k = 2\sqrt{\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + h^2}} \tag{5}$$

而 k' 为 k 的互补模数,即

$$k'^2 = 1 - k^2 \tag{6}$$

2 磁　　力

由于二平行共轴载流圆线圈间的磁力仅有 z- 分量,于是用虚功原理得[3]

$$F = F_z = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial h} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial h} \tag{7}$$

第一、二类完全椭圆积分对模数求导有[4]

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{kk'^2} - \frac{K(k)}{k} \tag{8}$$

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k} \tag{9}$$

将(4)～(6)式和(8)、(9)两式代入(7)式，化简后有

$$F = F_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 hk}{4k'^2\sqrt{r_1 r_2}}[2k'^2 K(k) - (1 + k'^2)E(k)] \tag{10}$$

不难验证 $F < 0$，它表明当电流流向相同时二载流线圈间相互作用的磁力为引力。

为考查 $|F|$ 的极值可令

$$\frac{\partial |F|}{\partial h} = 0 \tag{11}$$

把式(10)和式(5)代入上式，经化简得

$$\left(8r_1r_2 - h^2k^2 + \frac{h^2k^2}{k'^2}\right)K(k) - \left(4r_1r_2 + \frac{4r_1r_2}{k'^2} - 2h^2k^2 + \frac{2h^2k^4}{k'^4}\right)E(k) = 0 \tag{12}$$

在此条件下 $|F|$ 取得其最大值。

为求解方程(12)，我们利用展开式

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!(2i)!}{2^{4i}(i!)^4}k^{2i} \tag{13}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{i=0}^{\infty}2^{4i-1}\frac{(2i-2)!(2i)!}{(i-1)!(i!)^3}k^{2i}\right] \tag{14}$$

将(13)和(14)式代入(12)式中，忽略 $O(k^6)$ 求得方程(12)的近似解

$$h = \sqrt{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 + 3r_1r_2\right]^2 + 3r_1^2r_2^2} - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 - 3r_1r_2} \tag{15}$$

定义无量纲力为

$$f = \frac{|F|}{\frac{\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2}{4}} = \frac{hk}{k'^2\sqrt{r_1r_2}}[(1 + k'^2)E(k) - 2k'^2K(k)] \tag{16}$$

图 2 以参数 $r_2 = \frac{r_1}{2}$ 绘出 f 随 $\frac{h}{r_1}$ 变化的函数曲线。

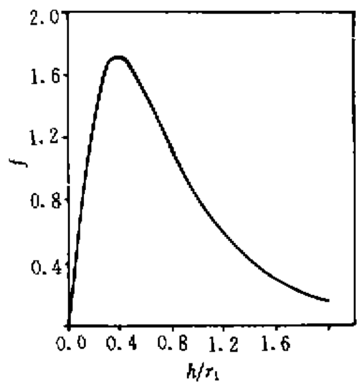

图 2　$f(h/r_1)$ 的变化曲线

3 特 例

设上线圈足够小以至

$$r_2 \ll \min(r_1, h) \tag{17}$$

用此条件于式(5)近似有

$$k = 2\sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1^2 + h^2}} \tag{18}$$

将展式(13)和(14)代进式(10),并略去 $O(k^7)$,得到

$$F = F_z = -\frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 N_1 N_2 h k^5}{64\sqrt{r_1 r_2}} \tag{19}$$

利用(18)式再将(19)式写成

$$F = F_z = -\frac{3\mu_0 \pi N_1 N_2 I_1 I_2 r_1^2 r_2^2 h}{2(r_1^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{20}$$

众所周知,当上载流线圈充分小时可作为磁偶极子处理,其磁矩为

$$\boldsymbol{p}_m = N_2 I_2 \pi r_2^2 \boldsymbol{k} \tag{21}$$

下载流线圈在磁偶极子所在点 O′ 产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_{O'} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_1 r_1^2}{(r_1^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k} \tag{22}$$

它可被近似看成是磁偶极子整个所在区域的场。容易验证(20)式的结果和下式结果的量值相同

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p}_m \cdot \boldsymbol{B}_{O'}) = (\boldsymbol{p}_m \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_{O'} \tag{23}$$

在磁偶极子于非均匀磁场受力理论中,此式已为我们所知[5]。

4 结 语

在经诺依曼公式用椭圆积分得出二平行共轴圆线圈间的互感系数后,采用虚功原理求二载流线圈间磁力是一行之有效的方法。该力量值具备一最大值点。我们得出的一般结论包含有载流线圈小到可当作磁偶极子处理的特殊情况。如果二电流的流向相反,除磁力为斥力外其它结论均与上述相同。笔者得出的磁力准确表达式可用于理论分析和工程设计、例如亥姆霍兹线圈的受力计算。

参 考 文 献

1 谢处方,饶克谨. 电磁场与电磁波. 北京:高等教育出版社,1989. 138~139

2 Greenhill A G. The Applications of Elliptic Functions. Dover,New York:1959. 175

3 焦其祥,王道东. 电磁场. 北京:北京邮电出版社,1994. 73

4 Bowman F. Introduction to Elliptic Functions with Applications,English Universities,London:1953. 18

5 Wangsness R K. Electromagnetic Field,John Wiley & Sons,New York:1986. 278~279