·研究简报·

(21
105-113

体上矩阵稳定性及其判别准则*

The Stability of Quaternion Metrices and Their Judging Criteria

O151.21

冯海亮[①] 伍俊良[②]
Feng Hailiang Wu Junliang
(① 重庆建筑高等专科学校基础部,重庆,400030; ② 重庆大学工商管理学院;第一作者 34 岁,男,讲师,硕士)

摘 要 给出了体上矩阵稳定的概念和一些具体的判别准则,推广了通常矩阵论中 Robrbach, Taussky, Ostrowski 等定理,并将复矩阵特征值估计的 Gerschgorin 定理推广到体上。指出了四元素矩阵中亚负定矩阵是稳定矩阵和亚正定矩阵是不稳定的结论和其它一些结果。

关键词 四元数体; 左(右)稳定矩阵; 稳定矩阵判别准则

稳定性

中国图书资料分类法分类号 O151.21

ABSTRACT Some conceptions of stable quaternion matrices and some judging criteria are given. The Robrach theorem, Taussky theorem, Ostrowski-Schneider theorem and Gerschgorin theorem are generalized to quaternion field. The conclusion about two quaternion matrices, i. e., inferior positive matrices are unstable, interior negative matrices are stable and some other results are pointed out.

KEYWORDS quaternion field; left(right) stable matrices; stable matrices; judging criterion

0 引 言

在矩阵代数和矩阵论中关于复矩阵的稳定性问题早已被提出且有了许多经典的结果,它是微分方程稳定性理论中的重要概念。体上矩阵稳定性未见文献提及,其矩阵特征值的估计也尚少见,仅对一些特殊矩阵类的特殊谱值进行了种种形式的估计[1~3],比如对可Σ化、可中心化,自共轭矩阵的谱值进行迹、奇异值等估计,取得了一些有益的结果。笔者将对体上更广泛意义下的三大类矩阵(左特征值存在的一类,右特征值存在的一类、既左且右的特征值存在的一类)[1]的特征值实部进行估计,探讨体上矩阵稳定性问题。

1 基本引理

以 Q 表示四元数体, $Q_{n\times n}$ 表示一切 $A=(a_{ij})_{n\times n}, a_{ij}\in Q$ 的矩阵集。设 $a=a_0+a_1i+a_2j+$

---

* 收文日期 1997-04-04

$a_3k \in Q(a_i \in R, i = 0,1,2,3)$，则记 $\bar{a} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$ 为 a 的共轭四元素。$\mathrm{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2} = a_0$ 表示 a 的实部，$N(a) = \sqrt{a\bar{a}} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$ 表示 a 的模。显然，$N(ab) = N(a)N(b)$，$N(a) = N(\bar{a})$，对于 Q 上列向量 $X = (x_1, \cdots, x_s)^T \in Q_{s\times 1}$. 记 $N(X) = \sqrt{X^* X} = \sqrt{x_1^* x_1 + \cdots + x_s^* x_s} = \sqrt{N^2(x_1) + \cdots + N^2(x_s)}$ 为向量 X 的模。

定义 1　设 $A \in Q_{s\times s}$ 称 A 为左(右)稳定(半稳定)，如果 A 的左(右)特征根的实部为负实数(或 0).

定义 2　设 $A \in Q_{s\times s}$ 称 A 为稳定的，如果 A 既是左稳定的又是右稳定的。

定义 3　设 $A \in Q_{s\times s}$ 称 A 为不稳定的，如果 A 既不是左稳定的又不是右稳定的。

定义 4　给定一四元素 a，对任意四元数 $Z \in Q$ 若存在 $\varepsilon > 0$，使得 $N(Z - a) \leqslant \varepsilon$，则称集 $\Omega = \{Z | N(Z - a) \leqslant \varepsilon\}$ 为以 a 为中心，ε 为半径的广义球邻域。

引理 1　设 $a \in Q$，若 $\mathrm{Re}(a) < 0$ 且存在 $0 < \varepsilon \leqslant -\mathrm{Re}(a)$，则在以 a 为中心，ε 为半径的广义球邻域内的一切四元数 Z 均有：$\mathrm{Re}(Z) \leqslant 0$

证：设 $Z = Z_0 + Z_1i + Z_2j + Z_3k$，$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$，由题设：

$$(Z_0 - a_0)^2 + (Z_1 - a_1)^2 + (Z_2 - a_2)^2 + (Z_3 - a_3)^2 \leqslant [-\mathrm{Re}(a)]^2$$

必有

$$(Z_0 - a_0)^2 \leqslant [\mathrm{Re}(a)]^2$$

从而

$$|Z_0 - a_0| \leqslant |\mathrm{Re}(a)| = |a_0|$$

$$a_0 - |a_0| \leqslant Z_0 \leqslant a_0 + |a_0| = 0$$

故

$$\mathrm{Re}(Z) = Z_0 \leqslant 0$$

引理 2　设四元数序列 $a_1, a_2, \cdots, a_s \in Q$，$b_1, b_2, \cdots, b_s \in Q$，则

$$N^2(\sum_{k=1}^{s} a_k b_k) \leqslant \sum_{k=1}^{s} N^2(a_k)(\sum_{k=1}^{s} N^2(b_k))$$

证：引入任意四元数 λ，则：

$$\sum_{k=1}^{s} N^2(a_k - \lambda\bar{b}_k) = \sum_{k=1}^{s} (a_k - \lambda\bar{b}_k)(\bar{a}_k - b_k\bar{\lambda})$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_k\bar{a}_k - \sum_{k=1}^{s} a_k b_k \bar{\lambda} - \sum_{k=1}^{s} \lambda\bar{b}_k\bar{a}_k + \sum_{k=1}^{s} \lambda\bar{b}_k b_k \bar{\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} N^2(a_k) - 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\sum_{k=1}^{s} a_k b_k) + N^2(\lambda)\sum_{k=1}^{s} N^2(b_k)$$

取 $\lambda = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{s} N^2(b_k)}$　　$(b \neq 0)$ 代入上式有：

$$\sum_{k=1}^{s} N^2(a_k - \lambda \bar{k}) = \sum_{k=1}^{s} N^2(a_k) - \frac{N^2(\sum_{k=1}^{s} a_k b_k)}{\sum_{k=1}^{s} N^2(b_k)} \geqslant 0$$

从而

$$N^2(\sum_{k=1}^{s} a_k b_k) \leqslant (\sum_{k=1}^{s} N^2(a_k))(\sum_{k=1}^{s} N^2(b_k))$$

引理 3 对任意四元数序列 $a_1, a_2. \cdots, a_n \in Q$,有:

$$N(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leqslant N(a_1) + N(a_2) + \cdots + N(a_n)$$

直接由 Euclid 范数的三角不等式知结论成立。

2 亚正(亚负)定矩阵[4]的稳定性

一大类矩阵的不稳定性和另一大类矩阵的稳定性,它们是:

引理 1 体上任何亚正定矩阵决不是稳定矩阵。

证 要证明亚正定矩阵既不是左稳定的,也不是右稳定的。设 $A \in Q_{n\times n}$ 为亚正定矩阵,λ 为 A 的左特征值,X 为 λ 的特征向量,则:

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

导出

$$X^* A^* = X^* \bar{\lambda} \tag{2}$$

由(2)两边右乘 X 有:

$$X^* A^* X = X^* \bar{\lambda} X \tag{3}$$

用 X^* 左乘(1)有:

$$X^* AX = X^* \lambda X \tag{4}$$

由(3)+(4)有:

$$X^*(A + A^*)X = X^*(\lambda + \bar{\lambda})X$$

从而

$$\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = \frac{X^*(A + A^*)X}{2N^2(X)} > 0$$

从而 A 不是左稳定的。

若 u 为 A 的右特征值,Y 为 u 的特征向量

由 $AY = Yu$ 有:$Y^* = AY = Y^* Yu$

$Y^* A^* = \bar{u} Y^*$ 从而,$Y^* A^* Y = \bar{u} Y^* Y$

$Y^*(A^* + A)Y = (u + \bar{u})N^2(Y)$

因此,$\mathrm{Re}(u) = \dfrac{u + \bar{u}}{2} = \dfrac{Y^*(A^* + A)Y}{2N^2(Y)} > 0$

从而,A 不是右稳定的,所以,A 不是稳定的。

推论 1　亚正定矩阵的任何主子阵不是稳定矩阵。

推论 2　亚正定矩阵的和矩阵也不是稳定矩阵。

仿定理 1 的证明过程可得：

定理 2　体上任何亚负定矩阵[4][5]必是稳定的。

推论 3　亚负定矩阵的任何主子阵必是稳定的。

推论 4　亚负定矩阵之和是稳定的。

定理 3　$A \in Q_{n\times n}$ 为亚负定矩阵，则对任意 $B \in Q_{n\times n}$，$B^{*}AB$ 是稳定的。

证：注意到 $B^{*}AB$ 是亚负定的，因为：

$$B^{*}AB = (B^{*}AB)^{*} = B^{*}AB + B^{*}A^{*}B = B^{*}(A + A^{*})B$$

故，对任何列向量 $X = (x_1,\cdots,x_n)^{T} \in Q_{n\times 1}$，有

$$\begin{aligned} & X^{*}[B^{*}AB + (B^{*}AB)^{*}]X = X^{*}B^{*}(A + A^{*})BX \\ & = (BX)^{*}(A + A^{*})BX < 0 \end{aligned}$$

从而 $B^{*}AB$ 是亚负定的。

从而是稳定的。

参照[4]还可讨论关于亚负定矩阵的 Hadamard 乘积和圈积的一些稳定性问题。

3　稳定矩阵的判别准则

定理 4　设 $A = (a_{ij}) \in Q_{n\times n}$，若 $\mathrm{Re}(a_{ii}) \leqslant 0(i = 1,\cdots,n)$ 且存在正实数 $t_1,\cdots,t_n$，使得 $\sqrt{(n-1)\sum_{j\neq m} N^2(t_j a_{ij})} \leqslant -t_i\mathrm{Re}(a_{ii})$，则 A 为左稳定(或左半稳定的)。

证：设 λ 为 A 的任意的左特征值，对应 λ 的特征向量 $X = (x_1,\cdots,x_n)^{T} \in Q_{n\times 1}$

由 $AX = \lambda X$ 有：$t_i\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_i x_j$

取 $N(x_m) = \max_i N(x_i)$ 则

$$t_m\lambda x_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}t_m x_j = t_m a_{mm}x_m + \sum_{j\neq m} t_j a_{mj}x_j$$

用 x_m^{*} 右乘上式两边有：

$$t_m\lambda x_m x_m^{*} = t_m a_{mm}x_m x_m^{*} + \sum_{j\neq m} t_j a_{mj}x_j x_m^{*}$$

从而

$$t_m\lambda - t_m a_{mm} = \frac{\sum_{j\neq m} t_j a_{mj}x_j x_m^{*}}{N^2(x_m)}$$

由引理 2 及引理 3 知

$$N(t_m\lambda - t_m a_{mm}) = N\left(\frac{\sum\limits_{j\neq m} t_j a_{mj} x_j x_m^*}{N^2(x_m)}\right)$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j\neq m} N^2(t_j a_{mj})} \cdot \sqrt{\sum_{j\neq m} N^2\left(\frac{x_j}{N(x_m)}\right) N^2\left(\frac{x_m^*}{N(x_m)}\right)}$$

$$\leqslant \sqrt{(n-1)\sum_{j\neq m} N^2(t_j a_{mj})} \leqslant - t_i \mathrm{Re}(a_{ii}) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

由引理 1 知 $\mathrm{Re}(t_m\lambda) \leqslant 0$，从而 $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$，故 A 是左稳定(或左半稳定的)。

定理 5 设 $A = (a_{ij}) \in Q_{n\times n}$，若 $\mathrm{Re}(a_{ii}) < 0 (i = 1, \cdots, n)$，且存在正实数 $t_1, \cdots, t_n$ 使得 $\sum\limits_{j\neq i} N(t_j a_{ij}) \leqslant - t_i \mathrm{Re}(a_{ii}) (i = 1, \cdots, n)$，则 A 为左稳定(或左半稳定)的。

证：设 λ 为 A 的任意左特征值，对应于 λ 的特征向量 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in Q_{n\times 1}$

取

$$y_i = \frac{x_i}{t_i} (i = 1, \cdots, n) \quad N(y_m) = \max_i N(y_i)$$

则由 $AX = \lambda X$ 有：

$$\lambda t_i y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j y_j$$

$$\lambda t_m y_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} t_j y_j = t_m a_{mm} y_m + \sum_{j\neq m} t_j a_{mj} y_j$$

用 y^* 右乘上式两边，有：

$$\lambda t_m y_m y_m^* = t_m a_{mm} y_m y_m^* + \sum_{j\neq m} t_j y_j y_m^*$$

$$\lambda t_m - t_m a_{mm} = \frac{\sum\limits_{j\neq m} t_j a_{mj} y_j y_m^*}{N^2(y)}$$

由引理 3 得

$$N(t_m\lambda - t_m a_{mm}) \leqslant \sum_{j\neq m} N(t_j a_{mj}) \leqslant - t_i \mathrm{Re}(a_{ii})$$

故，由引理 1 知 $\mathrm{Re}(t_m\lambda t) \leqslant 0$，所以 $\mathrm{Re}(\lambda t) \leqslant 0$

即 A 为左稳定(或左半稳定)的。

由定理 4 有：

推论 5 设 $A = (a_{ij}) \in Q$，若 $\mathrm{Re}(a_{ii}) < 0, i = 1, \cdots, n$，且 $\sqrt{(n-1)\sum\limits_{j\neq i} N(a_{ij})} \leqslant -$ $\mathrm{Re}(a_{ii})$，则

A 为左稳定(左半稳定)的。

由定理 5，有：

推论 6 设 $A = (a_{ij}) \in Q$，若 $\mathrm{Re}(a_{ii}) < 0, i = 1, \cdots, n$，则 A 是左稳定(或左半稳定)的。

定理 5 是复矩阵论中著名的 Ostrowski-Schneider 定理[6]在四元数体上的推广，从而也推广了 Robrbach 定理和 Taussky 定理（因为 Robrbach 定理和 Taussky 定理是 Ostrowski-Schneider 定理的推论）。

4 Gerschgorin 定理在体上的推广

由定理 4、定理 5 受到启发，其思路及证明对 Gerschgorin 定理在体上的表现形式也是适用的。我们给出体上矩阵左特征值的两个分布定理（其证明思路和方法与定理 4，定理 5 完全相类似，限于篇幅故此处略）。

定理 6　设 $A \in Q_{n\times n}$，则 $A = (a_{ij})$ 的左特征值均在体上的 n 个广义球邻域 $N(Z - a_{ii}) \leqslant \sqrt{n-1}R_i, i = 1,\cdots,n$ 的和集内，其中 $R_i = \sqrt{\sum_{j\neq i} N^2(a_{ij})}$

定理 7　设 $A = (a_{ij}) \in Q_{n\times n}$ 则 A 的左特征值均在体上 n 个广义球邻域 $N(Z - a_{ii}) \leqslant R_i (i = 1,\cdots,n)$ 的和集内，其中 $R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} N(a_{ij})$.

5 结束语

四元数体上代数问题是目前代数学发展中非常迅猛又非常重要的一个领域[1~6]，它将人们常规一维或二维代数问题引入到多维空间，这对当今科学技术发展的多维化趋势有极为重要的理论意义和现实意义。笔者首次提出四元数体上矩阵稳定性问题，是对代数问题扩张的一次尝试，它的潜在作用将随着问题研究的深入而有所展现。

参 考 文 献

1 屠伯埙．Schur 定理在四元数体上的推广．数学年刊，1988，9A(2)：130～138

2 杨忠鹏．具有实谱值的四元数矩阵的谱估计．数学研究与评论，1994，(4)：461～467

3 刘建洲．四元数自共轭矩阵乘积的特征值不等式．数学研究与评论，1992，(3)：379～383

4 屠伯埙．四元数体上矩阵弱直积与弱圈积．复旦学报（自然科学版），1991，(3)：331～340

5 谢邦杰．四元数自共轭矩阵与行列式．吉林大学学报（自然科学版），1980，(2)：21

6 Ostrowski A，Schneider H. Some-theorems on the inertia of general matrices，J. Math，Anal. Apple. 1962，(4)：72～84