(2) 7-15

饱和多孔弹性材料中加速度波的传播*

刘占芳[①**] 严 波[①] 詹景成[②] O347.4
(①重庆大学工程力学系,重庆,400044;②中国工程物理研究院;第一作者35岁,男,教授)

摘 要 讨论多孔介质中加速度波的传播问题。采用Bowen的模型描述由线弹性可压缩固体骨架和可压缩流体组成的饱和多孔介质,并且本文将孔隙度的演化修正为与固体和流体速度的散度相关联。然后用改进的控制场方程研究两相多孔介质中加速度波的传播,结果表明在该种介质中存在两种加速度波。最后考察了均匀弱间断情况下加速度波的波幅演化规律。

关键词 多孔介质;加速度波;孔隙度演化 弹性材料
中国图书资料分类法分类号 O347.4

0 引 言

多孔材料中弱间断波的传播问题,笔者已在文[1,2]中作过讨论。一方面,根据Bowen的模型[3]和de Boer的工作[4],已经得到这样一个结果:在不可压饱和多孔介质中,仅有一个纵波和一个横波传播。另一方面,实验表明[5],在可压缩两相多孔介质中存在两个纵波和一个剪切波。本文将进一步利用Bowen的可压缩模型[6]讨论可压缩多孔介质中加速度波的传播问题。

首先,简要介绍控制场方程,即Bowen模型的线性化描述。为了确保模型的封闭性,Bowen假设了一个孔隙度的演化方程。笔者认为,该演化方程应将孔隙度的变化与两相速度的散度相联系而不是与两相位移的散度相联系,为此对孔隙度的演化方程进行了修正。下面将看到,在多孔介质中有两种加速度波,即两个纵波(双波结构)和一个剪切波。并且我们考察了加速度波的波幅的演化规律,为此作了一个基本假设,即波幅沿着波阵面的切向方向保持不变。决定两个纵波波幅的控制方程组的求解是一个有待解决的数学问题,而剪切波波幅变化的显式已得到,该表达式表明剪切波波幅变化依赖于波阵面的初始几何形状和两相间的扩散效应。

1 控制方程

本节首先简介Bowen的多孔介质线性化模型,然后给出修正后的孔隙度演化方程。关

* 收文日期 1997-10-01
国家自然科学基金(19402020)及亚历山大·冯·洪堡基金会(AvH)资助项目
** 重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员

于 Bowen 模型的详细介绍参见[6].

考虑由一弹性可压固体相和一可压流体相组成的均匀多孔介质，其中流体(气、液)可在固相构成的可变形骨架中流动。选取固体骨架的未变形状态为参考构形，则场变量由流体密度 ρ^F，固体的位移 $\boldsymbol{u}^S$ 和流体位移 $\boldsymbol{u}^F$ 以及孔隙度 n^F(流体的体积分数)来描述。由于固体密度 ρ^S 取常数，而固体骨架的体积分数 n^S 总可以由饱和条件($n^S + n^F = 1$)确定，故在 Bowen 模型中两者均不看作独立变量。在此忽略温度的影响。

线性化场方程包括流体的质量守恒方程，固体和流体的动量守恒方程，即：

$$\frac{\partial \rho^F}{\partial t} + \rho^F_+ \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{u}^F}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \rho^S_+ \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^S}{\partial t^2} = & (\lambda^S + \mu^S)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^S + \mu^S \operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{u}^S \\ & + \lambda^{SF}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^F + \Gamma^S \operatorname{grad} n^F + \xi\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^F}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{u}^S}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \rho^F_+ \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^F}{\partial t^2} = & \lambda^F \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^F + \lambda^{SF}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^S \\ & + \Gamma^F \operatorname{grad} n^F - \xi\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^F}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{u}^S}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

式中 ρ^F_+ 和 ρ^S_+ 是流体和固体为静止状态的密度，$\lambda^S, \mu^S, \lambda^F, \Gamma^S$ 和 Γ^F 是在静止状态下测得的多孔材料的常数，λ^{SF} 为耦和运动系数，ξ 为扩散系数。grad 和 div 分别表示对固体质点在参考构形中的位置 $\boldsymbol{X}$ 的梯度和散度。

由式(1)～(3)可见共有4个未知场变量而只有3个场方程，为使问题有确定解，需要一个附加方程，该方程与孔隙度有关。Bowen 曾经假设孔隙度的演化服从一个率型本构方程，然而他提出的方程会导致孔隙度变化($\partial n^F/\partial t$)和质量密度变化($\partial \rho^F/\partial t$)之间的矛盾。后面将对此作进一步讨论。

Wilmanski 提出了孔隙度的另一种演化规律[7]，认为孔隙度满足一平衡方程。由于孔隙度的变化与流体速度的散度具有相同的量纲，因此我们认为孔隙度的变化应与两相速度的散度有关，而不是如 Bowen 模型认为的与两相位移的散度有关。于是孔隙度的率型表达式修正为：

$$\frac{\partial n^F}{\partial t} = -\Lambda^F\left\{(n^F - n^F_+) + \frac{\Gamma^S}{\Phi^F}\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{u}^S}{\partial t} + \frac{\Gamma^F}{\Phi^S}\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{u}^S}{\partial t}\right\} \tag{4}$$

这里 n^F_+ 为静止状态时的孔隙度，Λ^F 和 Φ^F 是多孔材料的参数。方程(1)～(4)表明，弹性固体和流体构成的多孔材料的线性化模型具有9个材料常数，这些常数的确定已由 Bowen 在文献[6]中作了介绍。

2 加速度波的传播条件

多孔材料中波传播的基本类型可通过考察加速度波的传播条件予以确定。这里先介绍运动曲面的几何和相容条件，可参见[8].

三维欧几里德空间中一族单参数运动曲面 $\sigma(t)$ 由下式给出：

$$X = X(y^{\alpha}, t), \qquad \alpha = 1,2 \tag{5}$$

此处 y^{α} 是超曲面 $\sigma(t)$ 的曲线坐标，t 表示某一时刻，X 是正交直角坐标系中的坐标。

对于有向曲面 $\sigma(t)$，切向向量为：

$$X_{,\alpha} = \frac{\partial X}{\partial y^{\alpha}} \tag{6}$$

这里 $X_{,\alpha}$ 为该曲面上的协变基矢量，相应的逆变基矢量由 $X^{\alpha}_{,}$ 表示。曲面的第一基本型则为：

$$a_{\alpha\beta} = X_{,\alpha} \cdot X_{,\beta} \tag{7}$$

曲面的第二基本型的分量满足：

$$b_{\alpha\beta} = n \cdot X_{,\alpha\beta} = n_{,\alpha} \cdot X_{,\beta} \tag{8}$$

n 是曲面 $\sigma(t)$ 的单位法向矢量。曲面的平均曲率 Ω 和 Gauss（总）曲率 K 是第二基本型 b^{α}_{β} 的第一和第二不变量，分别为：

$$\Omega = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}b^{\alpha}_{\alpha} \tag{9}$$

$$K = \frac{1}{2}(b^{\alpha}_{\alpha})^2 - \frac{1}{2}b^{\alpha}_{\beta}b^{\beta}_{\alpha} \tag{10}$$

下面我们的讨论限于这样的问题，即曲面前沿区域初始时处于静止，即参考状态为无应力状态。在此情况下曲面的传播速度为：

$$U = n \cdot \dot{X}, \qquad \dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t}(y^{\alpha}, t) \tag{11}$$

对于曲面上任一与时间相关的场变量 $\varphi(x,t)$，引入位移导数：

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + Un \cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{12}$$

方程(12) 定义为沿曲面法向轨迹的时间导数。下面给出一个有用的关系式：

$$\frac{\delta n}{\delta t} = - U_{,\alpha}X^{\alpha}_{,} \tag{13}$$

这个表达式将单位法向矢量 n 的位移导数与曲面（即波阵面）的传播速度联系起来。

下面给出二阶相容条件。引入下列记号：

$$A = [\varphi], \qquad B = [\mathrm{grad}\varphi] \cdot n,$$
$$C = [\mathrm{grad\,grad}\varphi] \cdot n \otimes n, \qquad A' = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] \tag{14}$$

这里[…]表示通过奇异曲面的间断，$n \otimes n$ 表示单位法向矢量 n 的并矢。那么相容的几何条件为：

$$[\mathrm{grad}\varphi] = Bn + a^{\alpha\beta}A_{,\alpha}X_{,\beta} \tag{15}$$

$$[\mathrm{grad\,grad}\varphi] = Cn \otimes n + a^{\alpha\beta}(\beta_{,\alpha} + a^{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}A_{,\delta})(n \otimes X_{,\beta} + X_{,\beta} \otimes n) + a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}(A_{,\alpha\gamma} - Bb_{\alpha\gamma})X_{,\beta} \otimes X_{,\delta} \tag{16}$$

而相容的运动学条件为：

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = - UB + \frac{\delta A}{\delta t} \tag{17}$$

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t}\right]=\left\{UC-\frac{\delta B}{\delta t}-\alpha^{\alpha\beta}A_{,\alpha}U_{,\beta}\right\}U+\frac{\delta A'}{\delta t} \tag{18}$$

$$\left[\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=\left\{-UC+\frac{\delta B}{\delta t}+\alpha^{\alpha\beta}A_{,\alpha}U_{,\beta}\right\}\boldsymbol{n}+\alpha^{\alpha\beta}A_{,\alpha}\boldsymbol{X}_{,\beta} \tag{19}$$

现在讨论加速度波的传播条件。根据定义，当下列量从两个方向向一光滑曲面接近时，下述间断条件自动满足[1,2]：

$$[\boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}]=0,\quad [\boldsymbol{u}^{\mathrm{F}}]=0,\quad \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}}{\partial t}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{F}}}{\partial t}\right]=0$$
$$[n^{\mathrm{F}}]=0,\quad [\rho^{\mathrm{F}}]=0 \tag{20}$$

考虑穿过曲面 $\sigma(t)$ 时的质量平衡方程(1) 和修正后的孔隙度演化方程(4)，借助于运动相容条件(17) 和(19) 式，分别用流体质量密度、孔隙度变化以及固体和流体速度的散度代换(14) 中的 φ，即可得到间断量：

$$\left[\frac{\partial\rho^{\mathrm{F}}}{\partial t}\right]=-U\gamma \tag{21}$$

$$\left[\frac{\partial n^{\mathrm{F}}}{\partial t}\right]=-U\kappa \tag{22}$$

$$\left[\mathrm{div}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}}{\partial t}\right]=-U\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}}\cdot\boldsymbol{n}\qquad \left[\mathrm{div}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{F}}}{\partial t}\right]=-U\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}\cdot\boldsymbol{n} \tag{23}$$

这里 γ 和 κ 是流体密度梯度和孔隙度梯度的间断强度，α^{S} 和 α^{F} 分别为固体和流体中加速度波的波幅[2]。

在曲面的两侧对方程(1) 和(4) 取极限并利用(21) ～ (23)，同时忆及(20)，可得到穿过曲面时这两个方程的间断条件满足：

$$\gamma=-\rho^{\mathrm{F}}_{+}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}\cdot\boldsymbol{n} \tag{24}$$

$$\kappa=-\Lambda^{\mathrm{F}}\left\{\frac{\Gamma^{\mathrm{S}}}{\Phi^{\mathrm{F}}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}}\cdot\boldsymbol{n}+\frac{\Gamma^{\mathrm{F}}}{\Phi^{\mathrm{S}}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}}\cdot\boldsymbol{n}\right\} \tag{25}$$

式(24) 和(25) 表明间断强度 γ 和 κ 由加速度波的波幅确定。它们可视为由加速度波引起的流体密度梯度和孔隙度梯度的扰动。此外，(24) 和(25) 式也部分地证实了孔隙度演化表达式(4)。否则，可能得出一个错误的结论，即通过曲面时流体的密度梯度存在间断而孔隙度梯度却无间断。

接下来继续考察运动方程(2) 和(3). 为此，还需要其它几个量通过曲面时的间断条件。借助于式(14) ～ (16) 和(18)，可得到如下结果：

$$[\mathrm{grad}\,n^{\mathrm{F}}]=\kappa\boldsymbol{n} \tag{26}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}}{\partial t^2}\right]=U^2\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}},\qquad \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^{\mathrm{F}}}{\partial t^2}\right]=U^2\boldsymbol{a}^{\mathrm{F}} \tag{27}$$

$$[\mathrm{grad}\;\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}]=\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} \tag{28}$$

忆及(20) 和(25) 式，将(26) ～ (28) 式代入通过奇异曲面即波阵面时方程(2) 和(3) 的间断

形式，有：

$$\rho_+^S U^2 a^S = \alpha_1 a^S \cdot nn + \mu^S a^S + c a^F \cdot nn \tag{29}$$

$$\rho_+^F U^2 a^F = c a^S \cdot nn + b a^F \cdot nn \tag{30}$$

记：

$$a = \alpha_1 + \mu^S, \qquad \alpha_1 = \lambda^S + \mu^S - \frac{\Lambda^F (\Gamma^S)^2}{\Phi^F} \tag{31}$$

$$b = \lambda^F - \frac{\Lambda^F (\Gamma^S)^2}{\Phi^F} \tag{32}$$

$$c = \lambda^{SF} - \frac{\Lambda^F \Gamma^S \Gamma^F}{\Phi^F} \tag{33}$$

也可将方程组(29)，(30) 写成矩阵形式：

$$\left\{\begin{pmatrix} \alpha_1 & c \\ c & b \end{pmatrix} n \otimes n + \begin{pmatrix} \mu^S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I - \begin{pmatrix} \rho_+^S & 0 \\ 0 & \rho_+^F \end{pmatrix} U^2 I \right\} \begin{pmatrix} a^S \\ a^F \end{pmatrix} = 0 \tag{34}$$

那么波的传播条件即是一个特征值问题。波幅 a^S 和 a^F 即为声张量：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & c \\ c & b \end{pmatrix} n \otimes n + \begin{pmatrix} \mu^S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I \tag{35}$$

的特征向量，其对应于 8 个传播速度的实平方，即 8 个特征值。如果这些特征值大于零，则 U 为实数，曲面将传播。若选择单位矢量 v 垂直于曲面的法向单位矢量 n，波幅可写成：

$$a^S = a_n^S n + a_\perp^S \nu, \qquad a_n^S = a^S \cdot n, \qquad a_\perp^S = a^S \cdot \nu, \qquad n \cdot \nu = 0 \tag{36}$$

$$a^F = a_n^F n + a_\perp^F \nu, \qquad a_n^F = a^F \cdot n, \qquad a_\perp^F = a^F \cdot \nu, \qquad n \cdot \nu = 0 \tag{37}$$

如 果波幅在曲面的法向 n 方向上，则得到纵波，反之，如果波幅在方向 ν 上，即得到横波。纵波的波幅用 a_n^S 和 a_n^F 表示，而剪切波的波幅则记作 $a_\perp^S$ 和 $a_\perp^F$. 将(36)，(37) 式代人(34) 有：

$$\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_+^S & 0 \\ 0 & \rho_+^F \end{pmatrix} U^2 \right\} \begin{pmatrix} a_n^S \\ a_n^F \end{pmatrix} = 0 \tag{38}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \mu^S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_+^S & 0 \\ 0 & \rho_+^F \end{pmatrix} U^2 \right\} \begin{pmatrix} a_\perp^S \\ a_\perp^F \end{pmatrix} = 0 \tag{39}$$

显然，波幅有非零解的必要条件是下列行列式为零：

$$\det\begin{pmatrix} a - \rho_+^S U^2 & c \\ c & b - \rho_+^F U^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{40}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mu^S - \rho_+^S U^2 & 0 \\ 0 & -\rho_+^F U^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{41}$$

从(40) 和(41) 可以得到，加速度波的传播速度仅取决于材料特性和各相间的耦合运动，而扩散效应不影响波的传播速度。从条件(40) 得到多孔介质中的两个传播速度，这意味着存在两个纵波，分别称为 P_1 波和 P_2 波，即：

对 P_1 波：

$$U_1^2=\frac{a\rho_+^F+b\rho_+^S+\sqrt{(a\rho_+^F+b\rho_+^S)^2-4\rho_+^F\rho_+^S(ab-c^2)}}{2\rho_+^F\rho_+^S} \tag{42}$$

对 P_2 波：

$$U_2^2=\frac{a\rho_+^F+b\rho_+^S-\sqrt{(a\rho_+^F+b\rho_+^S)^2-4\rho_+^F\rho_+^S(ab-c^2)}}{2\rho_+^F\rho_+^S} \tag{43}$$

这里材料常数应该满足条件：

$$ab-c^2\geqslant 0 \tag{44}$$

在(43)式中，如果取 $ab-c^2=0$，则 P_2 波的传播速度 U_2 为零，这意味着此时固体骨架中仅有一个纵波。

传播条件(41)式决定多孔材料中横波的传播速度，即有如下形式：

对 S 波：

$$U_3^2=\frac{\mu^S}{\rho_+^S}\qquad (U_4^2=0) \tag{45}$$

该结果表明固体骨架中仅有一个横波，称之为 S 波。

由于 3 个波的传播速度仅取决于多孔材料的物理和力学性能，从(13)式可知这些波在传播过程中波形保持不变。方程组(34)的解只能决定波幅矢量的方向，而不能确定其大小。

3 波幅的演化规律

现在讨论加速度波的波幅的演化方程。将运动方程(2)和(3)对时间求导，并考虑演化方程(4)，有：

$$\begin{aligned}\rho_+^S\frac{\partial^3\boldsymbol{u}^S}{\partial t^3}=&a_1\text{grad div}\frac{\partial\boldsymbol{u}^S}{\partial t}+\mu^S\text{div grad}\frac{\partial\boldsymbol{u}^S}{\partial t}\\&+c\text{grad div}\frac{\partial\boldsymbol{u}^F}{\partial t}-\Lambda^F\Gamma^S\text{grad}n^F\\&+\xi\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{u}^F}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\boldsymbol{u}^S}{\partial t^2}\right)\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\rho_+^F\frac{\partial^3\boldsymbol{u}^F}{\partial t^3}=&b\text{grad div}\frac{\partial\boldsymbol{u}^F}{\partial t}+c\text{grad div}\frac{\partial\boldsymbol{u}^S}{\partial t}\\&-\Lambda^F\Gamma^F\text{grad}n^F-\xi\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{u}^F}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\boldsymbol{u}^S}{\partial t^2}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

利用相容条件(16)、(18)以及传播速度为常数这一事实，得到下列导数的间断表达式：

$$\left[\frac{\partial^3\boldsymbol{u}^S}{\partial t^3}\right]=U^2\boldsymbol{c}^S+2U^2\frac{\delta\boldsymbol{a}^S}{\delta t},\qquad\left[\frac{\partial^3\boldsymbol{u}^F}{\partial t^3}\right]=U^2\boldsymbol{c}^F+2U^2\frac{\delta\boldsymbol{a}^F}{\delta t} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\left[\text{grad grad}\frac{\partial\boldsymbol{u}^S}{\partial t}\right]=&\boldsymbol{c}^S\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}-U(\boldsymbol{a}^S_{;\alpha}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\boldsymbol{X}^\alpha_{;}\\&+\boldsymbol{a}^S_{;\alpha}\otimes\boldsymbol{X}^\alpha_{;}\otimes\boldsymbol{n})+U\boldsymbol{a}^S\otimes\boldsymbol{X}^\alpha_{;}\otimes\boldsymbol{X}^\beta_{;}b_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{49}$$

$$\left[\text{grad grad}\frac{\partial\boldsymbol{u}^F}{\partial t}\right]=\boldsymbol{c}^F\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}-U(\boldsymbol{a}^F_{;\alpha}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\boldsymbol{X}^\alpha_{;}$$

$$+ a^{\mathrm{F}}_{;\alpha} \otimes X^{\alpha}_{;} \otimes n) + Ua^{\mathrm{F}} \otimes X^{\alpha}_{;} \otimes X^{\beta}_{;} b_{\alpha\beta} \tag{50}$$

这里引入：

$$c^{\mathrm{S}} = \left[\mathrm{grad\ grad}\frac{\partial u^{\mathrm{S}}}{\partial t}\right] n \otimes n, \qquad c^{\mathrm{F}} = \left[\mathrm{grad\ grad}\frac{\partial u^{\mathrm{F}}}{\partial t}\right] n \otimes n \tag{51}$$

作为未知量。

现在取方程(46)，(47) 通过曲面时的间断形式，并将(48) ～ (50) 代人其中，得到：

$$\begin{aligned}\rho^{\mathrm{S}}_{+} U^2 c^{\mathrm{S}} + 2\rho^{\mathrm{S}}_{+} U^2 \frac{\delta a^{\mathrm{S}}}{\delta t} = {} & \alpha_1 c^{\mathrm{S}} \cdot nn - \alpha_1 U(a^{\mathrm{S}}_{;\alpha} \cdot n X^{\alpha}_{;} + a^{\mathrm{S}}_{;\alpha} \cdot X^{\alpha}_{;} n) \\ & + \alpha_1 U a^{\mathrm{S}} \cdot X^{\alpha}_{;} X^{\beta}_{;} b_{\alpha\beta} + \mu^{\mathrm{S}} c^{\mathrm{S}} + \mu^{\mathrm{S}} U b^{\alpha}_{\alpha} a^{\mathrm{S}} \\ & + c c^{\mathrm{F}} \cdot nn - cU(a^{\mathrm{F}}_{;\alpha} \cdot n X^{\alpha}_{;} + a^{\mathrm{F}}_{;\alpha} \cdot X^{\alpha}_{;} n) \\ & + cUa^{\mathrm{F}} \cdot X^{\alpha}_{;} X^{\beta}_{;} b_{\alpha\beta} - \Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{S}} \Big(-\frac{\Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{S}}}{\Phi^{\mathrm{F}}} a^{\mathrm{S}} \cdot n \\ & - \frac{\Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{F}}}{\Phi^{\mathrm{F}}} a^{\mathrm{F}} \cdot n \Big) n + \xi U^2 (a^{\mathrm{F}} - a^{\mathrm{S}}) \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\rho^{\mathrm{F}}_{+} U^2 c^{\mathrm{F}} + 2\rho^{\mathrm{F}}_{+} U^2 \frac{\delta a^{\mathrm{F}}}{\delta t} = {} & b c^{\mathrm{F}} \cdot nn - bU(a^{\mathrm{F}}_{;\alpha} \cdot n X^{\alpha}_{;} + a^{\mathrm{F}}_{;\alpha} \cdot X^{\alpha}_{;} n) \\ & + bUa^{\mathrm{F}} \cdot X^{\alpha}_{;} X^{\beta}_{;} b_{\alpha\beta} + c c^{\mathrm{F}} \cdot nn \\ & - cU(a^{\mathrm{S}}_{;\alpha} \cdot n X^{\alpha}_{;} + a^{\mathrm{S}}_{;\alpha} \cdot X^{\alpha}_{;} n) \\ & + cUa^{\mathrm{S}} \cdot X^{\alpha}_{;} X^{\beta}_{;} b_{\alpha\beta} - \Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{S}} \Big(-\frac{\Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{F}}}{\Phi^{\mathrm{F}}} a^{\mathrm{S}} \cdot n \\ & - \frac{\Lambda^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{F}}}{\Phi^{\mathrm{F}}} a^{\mathrm{F}} \cdot n \Big) n - \xi U^2 (a^{\mathrm{F}} - a^{\mathrm{S}}) \end{aligned} \tag{53}$$

这里利用了关系[8]：

$$n \cdot X^{\alpha}_{;} = 0 \tag{54}$$

为了研究波幅的性质，忽略波幅对其在波阵面上位置的依赖关系，即考虑所谓的均匀弱间断情况。此时波幅的大小沿着波阵面切向方向保持为常数：

$$\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{n},\alpha} = 0 \qquad \alpha^{\mathrm{F}}_{\mathrm{n},\alpha} = 0 \qquad \alpha^{\mathrm{S}}_{\perp,\alpha} = 0 \tag{55}$$

这时波幅值对曲线坐标的协变微分就等于其偏微分。由上面的假设及关系(8) 和(54)，用单位法向量 n 乘以方程(52)，(53) 的两边，经整理得：

$$2\rho^{\mathrm{S}}_{+} U^2 \frac{\delta \alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{n}}}{\delta t} = L_1 \alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{n}} + M \alpha^{\mathrm{F}}_{\mathrm{n}} + (\alpha - \rho^{\mathrm{S}}_{+} U^2) c^{\mathrm{S}} \cdot n + c c^{\mathrm{F}} \cdot n \tag{56}$$

$$2\rho^{\mathrm{F}}_{+} U^2 \frac{\delta \alpha^{\mathrm{F}}_{\mathrm{n}}}{\delta t} = M \alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{n}} + L_2 \alpha^{\mathrm{F}}_{\mathrm{n}} + (b - \rho^{\mathrm{F}}_{+} U^2) c^{\mathrm{F}} \cdot n + c c^{\mathrm{S}} \cdot n \tag{57}$$

这里：

$$L_1 = \alpha U b^{\alpha}_{\alpha} + \frac{(\Lambda^{\mathrm{F}})^2 (\Gamma^{\mathrm{S}})^2}{\Phi^{\mathrm{F}}} - \xi U^2 \tag{58}$$

$$L_2 = b U b^{\alpha}_{\alpha} + \frac{(\Lambda^{\mathrm{F}})^2 (\Gamma^{\mathrm{F}})^2}{\Phi^{\mathrm{F}}} - \xi U^2 \tag{59}$$

$$M = c U b^{\alpha}_{\alpha} + \frac{(\Lambda^{\mathrm{F}})^2 \Gamma^{\mathrm{F}} \Gamma^{\mathrm{S}}}{\Phi^{\mathrm{F}}} + \xi U^2 \tag{60}$$

波幅的控制方程(56)，(57) 可改写成：

$$\begin{pmatrix} 2\rho_+^S U^2 & 0 \\ 0 & 2\rho_+^F U^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta \alpha_n^S}{\delta t} \\ \dfrac{\delta \alpha_n^F}{\delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n^S \\ \alpha_n^F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - \rho_+^S U^2 & c \\ c & b - \rho_+^F U^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^S \cdot n \\ c^F \cdot n \end{pmatrix} \tag{61}$$

式中 U 表示 P_1 波和 P_2 波的波速,从(40) 式可知上式中两个未知量 c^S 和 c^F 的系数组成的矩阵的行列式为零。如何求解该常微分方程是一个有待解决的问题。

类似地,用单位矢量 v 分别乘以方程(52),(53) 的两边,同时利用假设条件(55) 和传播条件(41),立即可得:

$$\frac{\delta \alpha_\perp^S}{\delta t} = \frac{\mu^S \theta^\cdot_{\alpha} - \xi U_3}{2\rho_+^S U_3} \alpha_\perp^S \tag{62}$$

这里利用了关系[8]:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_{,\alpha} = \theta^\beta_{\cdot\alpha} v \cdot \boldsymbol{X}_{,\beta} \tag{63}$$

根据位移导数的定义(12),引入下列替换关系:

$$\frac{\delta}{\delta t} = U\left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} + \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial t}\right) = U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \tag{64}$$

即在曲面 $\sigma(t)$ 法向上的全导数用 $\mathrm{d}/\mathrm{d}r$ 表示,r 为波阵面从初始位置到当前位置的距离。曲面在某一位置处的曲率为:

$$\Omega(r) = \frac{\Omega_0 - K_0 r}{1 - 2\Omega_0 r + K_0 r^2} \tag{65}$$

这里 Ω_0 和 K_0 分别为初始平均曲率和初始总曲率。因此由(64) 及(65),(62) 的积分结果为:

$$\alpha_\perp^S(r) = \alpha_\perp^S(0)(1 - 2\Omega_0 r + K_0 r^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(-Nr) \tag{66}$$

式中 $\alpha_\perp^S(0)$ 是固体中横波波幅的初值,系数 N 为:

$$N = \frac{\xi}{2\rho_+^S U_3} \tag{67}$$

横波的波幅决定于波前的初始几何特性和两相间的扩散效应。特别地,在非耗散的情况下,则波幅取决于波前的初始几何形状,此时横波的波幅演化蜕化为经典结果。

4 结束语

本文采用 Bowen 提出的两相可压缩线弹性多孔介质模型描述饱和多孔材料。将孔隙度的率型表达式修正为对固体和流体速度的散度的依赖而非对两相位移的散度的依赖,并通过考察传播条件对此进行了论证。

该模型预见了两类加速度波,其传播速度由材料常数确定而与扩散效应无关。在均匀弱间断的情况下,两个纵波的波幅由微分方程(61)确定,如前所述该方程的求解是一个有待解决的数学问题。剪切波波幅的显式表明了其对波前初始几何特性和扩散效应的依赖性,而扩散效应导致了波幅的衰减。

Bowen 线性化模型有 9 个材料常数。为了达到实际应用的目的,需进一步阐明材料常数

的确定方法。对方程(61)所描述的数学问题的物理特征的研究非常必要，对此我们将另文进行讨论。

参 考 文 献

1 刘占芳. Wave propagation in an incompressible fluid—saturated porous medium:[学位论文]. 重庆大学工程力学系，1992

2 de Boer R, Liu Zhanfang. Propagation of acceleration waves in incompressible saturated porous solids. Transport in Porous Media, 1995, 21(2):163～173

3 Bowen R M. Incompressible porous media model by use of the theory of mixtures. Int J Engng Sci, 1980, 18: 1 125～1 149

4 De Boer R. 多孔介质理论发展史上的重要成果. 刘占芳，严 波 译. 重庆大学出版社. 1995

5 Bourbie T, Coussy O, Zinszner B. Acoustics of porous media. Paris; Editions Technip, 1987. 130～147

6 Bowen R M. Compressible porous media model by use of theory of mixtures. Int J Engng Sci, 1982, 20(6): 697～735

7 Wilmanski K. Two—component compressible porous materials—The construction of the thermodynamical model. MECH—Bericht, Universität Essen, 1995, 20; 50～77

8 Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics. New York and London; Academic Press, 1974. 77～93

Acceleration Waves in Saturated Poroelastic Materials

Liu Zhanfang　　*Yan Bo*　　*Tang Lucheng*

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University)

ABSTRACT In this work the propagation of acceleration wave in porous media is investigated. The basic formulation of Bowen's model is adopted to describe the saturated porous media composed of a linear elastic compressible skeleton and a compressible fluid. In particular, the porosity change is modified to associate with divergence of velocities of the solid and the fluid rather than the divergence of displacements as Bowen's model. The modified governing field equations are then used to study the propagation condition of acceleraion wave in two—component porous materials. It is shown that two types of acceleration waves are realizable in the media. Finally, in the context of homogeneous weak discontinuity, the evolution of the amplitudes of acceleration wave is analyzed.

KEYWORDS porous media; acceleration wave; porosity evolution