1998年3月　　重庆大学学报　（自然科学版）　　Vol. 21, №. 2
第21卷第2期　　Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)　　Mar. 1998

(16) 85－89

动力学方程 Newmark 方法的 Neumann 级数解及其收敛性*

O302
O313

谈骏渝　　范镜泓
（重庆大学系统工程及应用数学系，重庆，400044；第一作者56岁，男，教授）

摘　要　讨论了动力学方程的 Newmark-Neumann 级数解及其收敛性，给出了级数解的收敛性条件，以及近似解和误差的估计式。

关键词　动力学方程；Newmark 方法；Neumann 级数；收敛性
中国图书资料分类法分类号　O302；O29

Newmark法

0　引　　言

在考虑结构系统的动力学问题时，经过离散化可以得到以下形式的二阶动力学方程[1]

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\} \tag{1}$$

这里，$[M]$ 为广义质量阵，$[K]$ 为广义刚度阵，$[C]$ 为广义阻尼阵。式(1)是一个具有常阵的二阶线性常微分方程组，由于系数矩阵的阶数较高，用古典方法（如乘幂法；Jacobi 法）无法计算求解；用提取前若干个最小特征值的方法（如子空间迭代或 Lanzos 法）也不太理想，以及当 $F(t)$ 为任意非循环荷载时求解也较困难。因此，实际上目前仍限于按时段逐次迭代推进，但若时段取大就不精确，取得太小又使计算量惊人增大。文[2]在 Newmark 方法的基础上应用Neuman级数求矩阵的逆，给出求增量的级数解。但是，该文并未对级数解的收敛性及误差分析进行讨论。众所周知，线性代数方程的计算机求解及级数的计算相对成熟，也较容易处理，问题就在如何保证计算精确。

对于动力学方程(1)，一般求得的都是近似解，因而对其收敛性或误差分析是很重要的研究内容。文[1]对 Newmark 方法的稳定性和精度分析已作了介绍和讨论，因此笔者只对应用 Neumann 级数求得的级数解的收敛性和误差分析进行讨论。

1　级数解及其收敛性

对方程(1)，由 Newmark 方法，在一个时间步长$[t, t+\triangle t]$内，有

$$\begin{aligned} x_{t+\triangle t} &= \triangle x + x_t \\ \dot{x}_{t+\triangle t} &= a_0^{(1)}\triangle x - a_1^{(1)}\dot{x}_t - a_2^{(1)}\ddot{x}_t \\ \ddot{x}_{t+\triangle t} &= a_0^{(2)}\triangle x - a_1^{(2)}\dot{x}_t - a_2^{(2)}\ddot{x}_t \end{aligned} \tag{2}$$

---

* 收文日期　1996-12-06

其中

$$a_0^{(1)} = \delta/\alpha\triangle t \qquad a_0^{(2)} = 1/\alpha(\triangle t)^2 \qquad a_1^{(1)} = \delta/\alpha - 1$$

$$a_1^{(2)} = 1/\alpha\triangle t \qquad a_2^{(1)} = \frac{\triangle t}{2}(\delta/\alpha - 2) \qquad a_2^{(2)} = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

且当 $\delta \geqslant 0.5, \alpha = 0.25(0.5 + \delta)^2$ 时，Newmark 方法是无条件稳定的[1]。

考虑 $t + \triangle t$ 时刻的动力学方程

$$[M]\{\ddot{x}\}_{t+\triangle t} + [C]\{\dot{x}\}_{t+\triangle t} + [K]\{x\}_{t+\triangle t} = \{F\}_{t+\triangle t} \tag{3}$$

将式(2) 代入(3)，有

$$[\bar{K}]\{x\}_{t+\triangle t} = \{\bar{F}\}_{t+\triangle t} \tag{4}$$

或写成增量形式

$$[\bar{K}]\{\triangle x\}_{t+\triangle t} = \{\bar{F}\}_{t+\triangle t} \tag{5}$$

式中

$$\begin{aligned}
[\bar{K}] &= [K] + a_0^{(1)}[C] + a_0^{(2)}[M] \\
\{\bar{F}\}_{t+\triangle t} &= \{F\}_{t+\triangle t} + [C](a_0^{(1)}\{x\}_t + a_1^{(1)}\{\dot{x}\}_t + a_2^{(1)}\{\ddot{x}\}_t) \\
&\quad + [M](a_0^{(2)}\{x\}_t + a_1^{(2)}\{\dot{x}\}_t + a_2^{(2)}\{\ddot{x}\}_t) \\
&= \{\bar{F}\}_{t+\triangle t} + [\bar{K}]\{x\}_t \\
\{\bar{F}\}_{t+\triangle t} &= [F]_{t+\triangle t} + [C](a_0^{(1)}\{x\}_t + a_1^{(1)}\{\dot{x}\}_t + a_2^{(1)}\{\ddot{x}\}) \\
&\quad + [M](a_1^{(2)}\{\dot{x}\}_t + a_2^{(2)}\{\ddot{x}\}_t) - [K]\{x\}_t
\end{aligned} \tag{6}$$

求解线性方程组(4) 或(5)，即可求得 $\{x\}_{t+\triangle t}$，从而可求得 $\{\dot{x}\}_{t+\triangle t}, \ddot{x}_{t+\triangle t}$. 现将矩阵 $[\bar{K}]$ 视为矩阵 $[K]$ 加上一个微小的变化 $[\triangle K]$，即 $[\bar{K}] = [K] + [\triangle K]$，于是方程(5) 变为

$$([K] + [\triangle K])\triangle x = \bar{F} \tag{7}$$

在以上方程中，我们略去了表示向量的大括号及时间脚标。

令 $p = [K]^{-1}[\triangle[K]$，由 Neamann 级数，可以得到

$$\begin{aligned}
\triangle x &= (I + p)^{-1}[K]^{-1}\bar{F} \\
&= (\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m p^m)[K]^{-1}\bar{F}
\end{aligned} \tag{8}$$

于是有以下结论：

定理 1 设 $[\bar{K}] = [K] + [\triangle K], p = [K]^{-1}[\triangle K]$ 且 $\|p\| < 1$ 及 $I + p$ 非奇异，则 $(I + p)^{-1}$ 存在，且有

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m p^m = (I + p)^{-1} \tag{9}$$

及

$$\|(I + p)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|p\|} \tag{10}$$

这里，$\|\cdot\|$ 表示矩阵的范数。

根据 Newmann 级数的性质[3]，不难证明定理成立。

由于实际计算时，对级数只能取有限项，因而存在截断误差。令 $\triangle x = \mathrm{D}x + \mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{D}x$ 和 $\mathrm{d}x$ 分别为级数取有限项得到的 $\triangle x$ 的近似及误差，且设

$$\mathrm{D}x = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m p^m[K]^{-1}\bar{F} \qquad \mathrm{d}x = \sum_{m=n+1}^{\infty}(-1)^m p^m[K]^{-1}\bar{F} \tag{11}$$

我们有

定理 2　设定理 1 条件成立，则有

$$\|\mathrm{D}x\| \leqslant \frac{1-\|p\|^{n+1}}{1-\|p\|}\|[K]^{-1}\|\,\|F\| = \frac{1-\|p\|^{n+1}}{1-\|p\|}KN \tag{12}$$

$$\|\mathrm{d}x\| \leqslant \frac{\|p\|^{n+1}}{1-\|p\|}KN \tag{13}$$

其中 $\|[K]^{-1}\| = K$，$\|F\| = N$，这里及以后仍用 $\|\cdot\|$ 表示向量的范数。

2　迭代及误差分析

在应用以上方法求解时，都要反复迭代求解方程(5) 所示的线性方程组，最后将产生误差累积，因此有必要进行误差分析或估计，以保证最终的近似解具有足够的精度。

设 $t_k \in [0,T]$，$t_k = t + k\Delta t$，$k = 0,1,\cdots$，又 $x^{(i)}(i = 0,1,2)$ 分别表示 $x,\dot{x},\ddot{x}$，则式(5) 可写成以下迭代的形式

$$[\bar{K}]\Delta x_k = F_k \qquad k = 1,2,\cdots \tag{14}$$

或

$$\Delta x_k = (I+p)^{-1}[K]^{-1}F_k \qquad k = 1,2,\cdots \tag{15}$$

以及

$$\begin{aligned} x_k &= \Delta x_k + x_{k-1} \\ x_k^{(i)} &= a_0^{(i)}\Delta x_k - a_1^{(i)}x_{k-1}^{(1)} - a_2^{(i)}x_{k-1}^{(2)} \qquad i = 1,2 \\ \Delta x_k &= \mathrm{D}x_k + \mathrm{d}x_k \end{aligned} \tag{16}$$

由于每次迭代求解方程组(14) 或(15) 时，均要产生截断误差，因此令 $x_0^{(i)} = x^{(i)}$，并记

$$x_k^{(i)} = \bar{x}_k^{(i)} + \tilde{x}_k^{(i)} \qquad (i = 0,1,2)$$

$$\bar{x}_k = \mathrm{D}x_k + \bar{x}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{D}x_i + x_0$$

$$\tilde{x}_k = \mathrm{d}x_k + \tilde{x}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{d}x_i \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_k^{(i)} &= a_0^{(i)}\mathrm{D}x_k - a_1^{(i)}\bar{x}_{k-1}^{(1)} - a_2^{(i)}\bar{x}_{k-1}^{(2)} \\ \tilde{x}_k^{(i)} &= a_0^{(i)}\mathrm{d}x_k - a_1^{(i)}\tilde{x}_{k-1}^{(1)} - a_2^{(i)}\tilde{x}_{k-1}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2) \tag{18}$$

式中 $\bar{x}_k^{(i)}(i = 0,1,2)$ 为 $x_k^{(i)}$ 的近似，$\tilde{x}_k^{(i)}$ 为其误差，且有 $\bar{x}_0 = x_0$，$\tilde{x}_0 = 0$。

将式(18) 代入式(6)，有 $F_k = F_k^{(1)} + F_k^{(2)}$，且

$$\begin{aligned} F_k^{(1)} &= F_k + [C](a_1^{(1)}\bar{x}_{k-1}^{(1)} + a_2^{(1)}\bar{x}_{k-1}^{(2)}) + [M](a_1^{(2)}\bar{x}_{k-1}^{(1)} + a_2^{(2)}\bar{x}_{k-1}^{(2)}) - [K]\bar{x}_{k-1} \\ F_k^{(2)} &= [C](a_1^{(1)}\tilde{x}_{k-1}^{(1)} + a_2^{(1)}\tilde{x}_{k-1}^{(2)}) + [M](a_1^{(2)}\tilde{x}_{k-1}^{(1)} + a_2^{(2)}\tilde{x}_{k-1}^{(2)}) - [K]\tilde{x}_{k-1} \end{aligned} \tag{19}$$

于是由式(8)，有

$$\begin{aligned} \Delta x_k = &\sum_{m=0}^{n_k}(-1)^m p^m[K]^{-1}F_k^{(1)} + \sum_{m=0}^{n_k}(-1)^m p^m[K]^{-1}F_k^{(2)} \\ &+ \sum_{m=n_k+1}^{\infty}(-1)^m p^m[K]^{-1}(F_k^{(1)} + F_k^{(2)}) \end{aligned} \tag{20}$$

及

$$\mathrm{D}x_k = \sum_{m=0}^{n_k}(-1)^m p^m[K]^{-1}F_k^{(1)}$$

$$\mathrm{d}x_k = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m p^m[K]^{-1}F_k^{(2)} + \sum_{m=n_k+1}^{\infty}(-1)^m p^m[K]^{-1}F_k^{(1)} \tag{21}$$

这里 n_k 为某个正整数。设已求得第 $k-1$ 次近似，于是可求得 $|F_k^{(1)}| = N_k$，以及

$$\|F_k^{(2)}\| \leqslant \|[C]\|(|a_1^{(1)}|\|\tilde{x}_{k-1}^{(1)}\| + + |a_2^{(1)}|\|\tilde{x}_{k-1}^{(2)}\|) + \|M\|(|a_1^{(2)}|\|\tilde{x}_{k-1}^{(1)}\| + |a_2^{(2)}||\tilde{x}_{k-1}^{(2)}|) + \|[K]\||\tilde{x}_{k-1}|$$

设其误差项 $\|\tilde{x}_{k-1}^{(i)}\| \leqslant \varepsilon_{k-1}^{(i)} \leqslant \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k-1} = \max\limits_{i=0,1,2}\{\varepsilon_{k-1}^{(i)}\}$. 从而

$$\begin{aligned}\|F_k^{(2)}\| < \|[C]\|(|a_1^{(1)}|\varepsilon_{k-1}^{(1)} + |a_2^{(1)}|\varepsilon_{k-1}^{(2)}) + \|[M]\|(|a_1^{(2)}|\varepsilon_{k-1}^{(1)} \\ + |a_2^{(2)}|\varepsilon_{k-1}^{(2)}) + \|[K]\|\varepsilon_k^{(0)} \leqslant [\|[C]\|(|a_1^{(1)}| + |a_2^{(1)}|) \\ + \|[M]\|(|a_1^{(2)}| + |a_2^{(2)}|) + \|[C]\|]\varepsilon_{k-1} = \bar{\varepsilon}_k\end{aligned} \tag{22}$$

其次，取 $\tilde{\varepsilon}_k = \dfrac{2k}{1-\|p\|}\bar{\varepsilon}_k$，以及

$$n_k > \left[\frac{\ln(1-\|p\|)\tilde{\varepsilon}_k/2KN_k}{\ln\|p\|}\right] + 1 \tag{23}$$

则由式(21)，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}x_k\| &\leqslant \frac{1-\|p\|^{n_k+1}}{1-\|p\|}KN_k = S_{n_k}KN_k \\ \|\mathrm{d}x_k\| &< \frac{1}{1-\|p\|}K\bar{\varepsilon}_k + \frac{\|p\|^{n_k+1}}{1-\|p\|}KN_k < \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{2} = \tilde{\varepsilon}_k\end{aligned} \tag{24}$$

式中 $\|[K]^{-1}\| = K$.

最后，由式(17)、(18)，可以得到经过 k 次迭代后的以下估计式：

$$\begin{aligned}&\|\bar{x}_k\| \leqslant (S_{n_1}N_1 + S_{n_2}N_2 + \cdots + S_{n_k}N_k)K + \|x_0\| \\ &\|\tilde{x}_k\| \leqslant \sum_{i=1}^{k}\|\mathrm{d}x_i\| \leqslant \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \cdots + \tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k^{(0)} \\ &\|\tilde{x}_k^{(i)}\| \leqslant |a_0^{(i)}|\|\mathrm{d}x_k\| + |a_1^{(i)}|\|\tilde{x}_{k-1}^{(1)}\| + |a_2^{(i)}|\|\tilde{x}_{k-1}^{(2)}\| \\ &\qquad < |a_0^{(i)}|\tilde{\varepsilon}_k + |a_1^{(i)}|\varepsilon_{k-1}^{(1)} + |a_2^{(i)}|\varepsilon_{k-1}^{(2)} = \varepsilon_k^{(i)} \qquad (i=1,2)\end{aligned} \tag{25}$$

取 $\varepsilon_k = \max\limits_{i=0,1,2}\{\varepsilon_k^{(i)}\}$，便有 $\|\tilde{x}_k^{(i)}\| < \varepsilon_k (i=0,1,2)$.

由以上讨论，可以给出 Newmark-Newmann 级数解法及误差估计的步骤如下：

· 初始计算

1) 赋初值 $x_0^{(i)}$ $(i=0,1,2)$

2) 取 $\delta \geqslant 0.5, \alpha = 0.25(0.5+\delta)^2$

3) 给定 $\triangle t, \varepsilon_0^{(i)}(i=0,1,2), \varepsilon_k, k=1,2,\cdots$

4) 计算 $a_k^{(i)}(i=0,1,2)$ 及 $|a_k^{(i)}|$，$\|[M]\|$，$\|[C]\|$，$\|[K]\|$ 等

5) 令 $\triangle x_0 = 0, x_0^{(i)} = \bar{x}^{(i)} = \bar{x}_0^{(i)}, \tilde{x}_0^{(i)} = 0$ $(\mathrm{d}x_0 = 0)$

· 迭代 $k = 1,2,\cdots$

1) 计算 $F_k, F_k^{(1)}$ 及 $F_k^{(2)}$

2) 取 n_k，由式(21) 计算 $\mathrm{D}x_k$ 和 $\mathrm{d}x_k$

3) 由式(17)、(18) 计算 $\bar{x}_k^{(i)}, \tilde{x}_k^{(i)}(i=0,1,2)$

4) $k+1 \Rightarrow k$，重复 1) ～ 3)

· 收敛判断

$\|p\| < 1, I + p$ 非奇异，迭代收敛。否则，另选$[\bar{K}]$和$[\triangle K]$.

· 误差估计

1) 由式(19)、(22) 计算 $|F_k^{(1)}| \leqslant N_k, |F_k^{(2)}| < \bar{\varepsilon}_k$

2) 由式(24)求 $\|dx_k\| < \tilde{\varepsilon}_k$

3) 由式(25)求 $\|\tilde{x}_k^{(i)}\| < \varepsilon_k^{(i)}$　$(i = 0,,1,2)$

· 误差分析和检验

1) 若 $\varepsilon_k^{(0)} < \varepsilon_k$，或 $\varepsilon_k^{(i)} < \varepsilon_k (k = 0,1,2)$，则继续迭代或迭代终止。

2) 若 $\varepsilon_k^{(0)} \not< \varepsilon_k$，或 $\varepsilon_k^{(i)} \not< \varepsilon_k (i = 0,1,2)$，则

① $n_k + 1 \Rightarrow n_k$，由式(24)、(25)重新计算 dx_k 和 $\tilde{x}_k^{(i)}$，直到 $|\tilde{x}_k^{(i)}| < \varepsilon_k$. 否则

② 若 $\exists n_k$，则返回前一步 $k-1$ 重新确定 n_{k-1}，计算 dx_{k-1} 及 $\tilde{x}_{k-1}^{(i)}$ 并重复步骤1)和2)①.

3 结束语

在将矩阵[K]分解为[K]+[△K]时要求 $\|p\| = \|[K]^{-1}[\triangle K]\| < 1$ 且 $I+P$ 非奇异，这就保证了Neumann级数或迭代的收敛性。显然 $\|p\|$ 越小，则迭代收敛越快，因此应选取[△K]相对[K]或 $\|p\|$ 尽可能地小。其次，[K]的选取或确定应使 $\|[K]\|$ 或 $\|[K]^{-1}\|$ 的计算较简单，如为稀疏矩阵等。

应用Neumann级数或逆阵，因为其展开式是幂级数，故而易于求和。应用于动力学方程求解，能够较简捷地给出动力响应的近似值和误差估计，因而是一种有效的方法。

本文的讨论可以应用于其他问题，对文[2]讨论的分段线性化的情形，即动力学方程(1)或增量方程(5)的系数矩阵本身也依赖于时间变量的情形，本文的讨论同样适用。对于不满足定理1条件的情形，以及如何扩大本文结果的应用范围等，还需作进一步的研究。

参 考 文 献

1 张汝清，殷学纲．计算结构动力学．重庆：重庆大学出版社，1987.116～150

2 龚开林，殷学纲．非线性动力学方程的Neumann级数——直接积分解法．重庆大学学报，1996，19(2)：51～55

3 黄友谦．计算方法．北京：高等教育出版社，1994.264～268

Neumann Series Solution of Newmark Method and Its Convergence for Solving Dynamic Equations

Tan Junyu　　*Fan Jinghong*

(Department of System Engineering and Applied Mathematics, Chongqing University)

ABSTRACT The convergence of Newmark-Neumann series method for solving dynamic equations is discussed. Conditions of convergence and the estimating expressions of approximate solution and error for the series solution are also given.

KEYWORDS dynamic equation; newmark method; neumann series; convergence