1999 年 3 月　　重庆大学学报 （自然科学版）　　Vol. 22
第 22 卷第 2 期　　Journal of Chongqing University(Natural Science Edition)　　Mar. 1999

⑱

灰色模型的推广及其应用*

97-102　　N94

周　平　谢开贵 ✓　周家启
（重庆大学电气工程学院，重庆，400044）

摘　要　用差分格式对灰色预测模型 GM(1,1) 进行改进，建立了 GM(1,1,λ) 模型，拓展了 GM(1,1) 模型的应用范围。通过求解 λ 的值，便可求出预测值。

关键词　灰色模型；差分格式；优化模型
中国图书资料分类法分类号　N94

灰色系统

0　引　言

灰色系统理论从一诞生就得到广大工程技术人员的喜爱，也引起了学术界的关注[1,2]。灰色预测具有要求样本数据少、原理简单、运算方便、短期预测精度高、可检验等优点，因而受到了电力系统研究人员的重视。目前，提高 GM(1,1) 模型预测精度的方法比较多，主要有以下三种形式：一是对原始序列进行变换，增加离散数据光滑度再进行预测[3~5]；二是修正模型系数，进行动态预测；三是对残差进行修正[6]。在实践中，有些数据用 GM(1,1) 模型预测时，预测精度非常低，甚至用上述几种修正方法也无能为力。笔者从 GM(1,1) 模型的建模机理着手建立了 GM(1,1,λ) 模型，同时，针对灰色预测不太适合于长期预测的原因，一定程度上是由于把 GM(1,1,λ) 模型中的参数 a，u 视为常数引起的，拟把 a 和 u 看成是随时间 t 而变的变数，以得到各预测点的最佳预测结果。

1　GM(1,1) 模型的改进

设 $\{X^{(0)}(i)\}$ 为原始时间数据序列，$i = 1,2,\cdots,n$.

为了简化分析，采用一阶单变量线性动态模型 GM(1,1)，其形式为：

$$dx^{(1)}/dt + ax^{(1)} = u$$

$$B = \begin{bmatrix} -1/2(X^{(1)}(1) + X^{(1)}(2)) & 1 \\ -1/2(X^{(1)}(2) + X^{(1)}(3)) & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -1/2(X^{(1)}(n-1) + X^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_n = (X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \cdots, X^{(0)}(n))^T$$

利用最小二乘法求解系数向量 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n = \begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix} \tag{2}$$

从而可得原始序列预测公式为：

$$\hat{X}^{(0)}(t+1) = [X^{(1)}(0) - u/a][e^{-a} - 1]e^{-at} \tag{3}$$

将(1) 式差分化：

* 收文日期　1997-12-31
第一作者：男，1970 年生，硕士

向前差分形式为： $X^{(1)}(t+1) - X^{(1)}(t) + aX^{(1)}(t) = u$ (4)

向后差分形式为： $X^{(1)}(t+1) - X^{(1)}(t) + aX^{(1)}(t+1) = u$ (5)

将(4)与(5)式的组合：(4) × λ + (5) × $(1-\lambda)$，其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，有：

$$X^{(1)}(t+1) - X^{(1)}(t) = -a(\lambda X^{(1)}(t) + (1-\lambda)X^{(1)}(t+1)) + u \tag{6}$$

由(4)、(5)式知，当 $X^{(0)}(t) \geqslant 0$ 时，$X^{(0)}(t)$ 单增，序列 $X^{(0)}(t+1) - X^{(0)}(t)$ 与 $X^{(0)}(t)$、$X^{(0)}(t+1)$ 有明显的正相关关系。式(6)就是模型 GM(1,1) 的一般差分形式，由其建立的灰色模型记为 GM(1,1,λ).

由式(6)知，只要给出一个 λ_0，便有：

$$B_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_0 X^{(1)}(2) + (1-\lambda_0)X^{(1)}(3)) & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -(\lambda_0 X^{(1)}(n-1) + (1-\lambda_0)X^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_n = (X^{(1)}(2) - X^{(1)}(1), X^{(1)}(4) - X^{(1)}(3), \cdots, X^{(1)}(n) - X^{(1)}(n-1))^{\mathrm{T}} =$$
$$X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \cdots, X^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}$$

由最小二乘原理知：

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = (B_0^{\mathrm{T}} B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} Y_n \tag{7}$$

将(7)式代入(3)式即可求得预测值。

2 参数 λ 的确定

2.1 以误差平方和最小为目标时模型的建立

根据(6)式，当 $X^{(0)}(t)$ 为单增序列或有单增趋势的序列时(单减序列或有单减趋势的序列分析情况类似)，有 $a < 0$，即有 $-a\lambda \geqslant 0$，$-a(1-\lambda) \geqslant 0$. 令：

$$-a\lambda = b;\ -a(1-\lambda) = c;\ y_t = X^{(1)}(t+1) - X^{(1)}(t), \quad t = 1, 2, \cdots, n-1$$

以误差平方和最小为目标时，参数 b, c, u 的估计可由下述带约束的最小二乘回归模型得出：

$$\min f_1(\mathbf{A}) = \sum_{t=1}^{n-1}(y_t - bX^{(1)}(t) - cX^{(1)}(t+1) - u)^2 \tag{8}$$

$$\text{s.t} \quad b \geqslant 0;\ c \geqslant 0$$

其中 $\mathbf{A} = (b, c, u)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{(k)} = (b^{(k)}, c^{(k)}, u^{(k)})^{\mathrm{T}}$

采用 Frank-Wolfe 算法即可求解模型。

这样，得到 b、c、u 的估计值后，a、λ、u 就易于求证了。

2.2 以误差绝对值和最小为目标时模型的建立

最小二乘估计具有许多优良性质，在生成、生活中已被广泛地应用，但在一些应用，特别是在某些数量经济的问题中，误差不能认为有正态性，而是服从一种尾部占更大比重的分布，理论证明：在这些情况下，最小一乘估计的统计性能优于最小二乘估计；相反，最小一乘准则的稳健性比最小二乘准则的稳健性好，而且其受异常点的影响较小一点，所以将误差绝对值之和最小为目标也被广泛地应用。

以误差绝对值之和最小为目标时，参数 b、c、u 的估计可由下述模型(带约束的最小一乘回归模型)给出：

$$\min f_2(\mathbf{A}) = \sum_{t=1}^{n-1} |y_t - bX^{(1)}(t) - cX^{(1)}(t+1) - u| \tag{9}$$

$$\text{s.t} \quad b \geqslant 0; c \geqslant 0$$

其中 $\mathbf{A} = (b, c, u)^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}^{(k)} = (b^{(k)}, c^{(k)}, u^{(k)})\mathrm{T}$

采用差分拟牛顿法[7,8]，求解(9)式(不含不等式约束式)。

下面用积极集法求解规划问题(9)．$\mathbf{A} = (b, c, u)^{\mathrm{T}}$，记 $c_1(\mathbf{A}) = (1,0,0)(b, c, u)^{\mathrm{T}} = b \triangleq a_1 A \geqslant 0$; $c_2(\mathbf{A}) \triangleq c = a_2 A \geqslant 0$; $I = \{1,2\}$．对 $\forall \mathbf{A} \in R^3$, $I(\mathbf{A}) = \{i \mid c_i(\mathbf{A}) \leqslant 0; i \in I\}$ 为 $c_i(A)$ 为 A 点的积极约束。求解(9)规划问题的算法如下：

Step1：给一个可行点 $\mathbf{A}^{(0)} = (b^{(0)}, c^{(0)}, u^{(0)})^{\mathrm{T}}$, $S_0 = I(\mathbf{A}^{(0)})$, $k = 0$;

Step2：$\mathbf{A}^{(k)}$ 不是(9)式的解，则转 Step4;

Step3：记 $I_k = \{i \mid c_i(\mathbf{A}^{(k)}) = 0\} \subseteq I$．若相应的 Lagrange 乘子 λ_k 满足：

$(\lambda_k)_i \geqslant 0$, $i \in I_k$，则停；求满足 $(\lambda_k)_{i_k} = \min\limits_{i \in I_k}(\lambda_k)_i < 0$ 的 i_k, $S_k = S_k \setminus \{i_k\}$;

Step4：用上述差分拟牛顿法算法求解：

$$\begin{aligned} &\min_{d \in R^3} f_2(\mathbf{A}^{(k)} + d) \\ &\text{s.t } a_i d = 0, i \in S_k \end{aligned} \tag{10}$$

(事实上，等式约束即为 $b = 0$、$c = 0$, $d_1 = 0$、$d_2 = 0$，从而(10)的问题可用求解(9)的算法求解)设最优解为 d_k;

Step5：在 d_k 上进行线搜索求出 $\alpha_k > 0$，且使步长 α_k 满足：

$$\alpha_k \leqslant \bar{\alpha}_k = \min_{\substack{i \in I_k \\ a_i^{\mathrm{T}} d_k < 0}} \frac{b_i - a_i^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{(k)}}{a_i^{\mathrm{T}} d_k}, \quad \mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} + \alpha_k d_k$$

对 $j \notin S_k$，如果 $a_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{(k+1)} = b_j$，则 $S_k = S_k \cup \{j\}$;

Step6：$S_{k+1} = S_k$, $k = k + 1$，转 Step2.

2.3 以百分误差绝对和最小为目标时模型的建立

最小一乘、最小二乘体现的都是数值的绝对差的关系，未能体现误差与原始数据相对大小关系。如两数的绝对差相等，但由于基数不同，使得其百分误差相差甚远。下面以百分误差绝对值之和最小为目标建立模型。

以百分误差绝对值之和最小为目标时，参数 b、c、u 的估计可由下述模型(带约束的最小一乘回归模型)给出：

$$\min f_3(\mathbf{A}) = \sum_{t=1}^{n-1} \left| 1 - \frac{bX^{(1)}(t) + cX^{(1)}(t+1) + u}{y_t} \right| \tag{11}$$

$$\text{s.t} \quad b \geqslant 0; c \geqslant 0$$

问题(11)可以用求解(9)的算法进行求解，此处不再繁述。

2.4 多目标模型的建立

在实际问题中，可以根据需要选择(2.1)、(2.2)、(2.3)节中的某一方法求出 λ 值，再进行灰色预测。但事实上预测模型的精度体现在误差平方和、误差绝对和、绝对百分误差和三个方面，仅仅考虑其中某一方面是欠妥的，所以需要同时考虑上述三个目标的优化问题：

$$\begin{cases}\min\ f_1(\mathbf{A}) \\ \min\ f_2(\mathbf{A}) \\ \min\ f_3(\mathbf{A})\end{cases} \qquad \text{s.t} \quad b \geqslant 0;\ c \geqslant 0 \tag{12}$$

下面采用线性加权的方法将(12)式转变成单目标问题。

由于 $f_1(\mathbf{A})$、$f_2(\mathbf{A})$、$f_3(\mathbf{A})$ 三个目标具有不同的量纲,故在作线性加权之前进行统一量纲处理。设(8)、(9)、(11)式求得的最优值为:f_1^*、f_2^*、f_3^*,以 $f_i(\mathbf{A})$ 分别除以 f_i^*($i = 1,2,3$),可得相应目标函数为:

$$\begin{cases}\min\ f'_1(\mathbf{A}) = f_1(\mathbf{A})/f_1^* \\ \min\ f'_2(\mathbf{A}) = f_2(\mathbf{A})/f_2^* \\ \min\ f'_3(\mathbf{A}) = f_3(\mathbf{A})/f_3^*\end{cases} \qquad \text{s.t}\ b \geqslant 0;\ c \geqslant 0 \tag{13}$$

取权重系数为 w_1、w_2、w_3,则线性加权评价函数为:

$$u(\mathbf{A}) = w_1 f'_1(\mathbf{A}) + w_2 f'_2(\mathbf{A}) + w_3 f'_3(\mathbf{A}) \tag{14}$$

故三目标优化问题(12)转化为下述单目标问题:

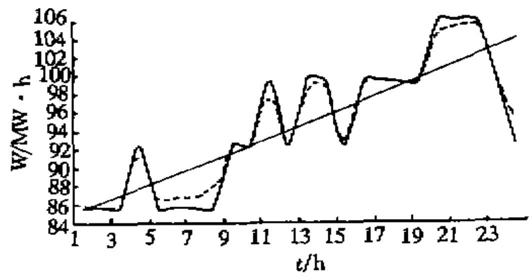
$$\min\ u(\mathbf{A}) \qquad \text{s.t}\quad b \geqslant 0;\ c \geqslant 0 \tag{15}$$

同样地,问题(15)可用求解(9)的算法进行求解。

3 算　例

应用上述预测模型,利用 micsoft Visual C++ 语言编制了预测程序对重庆某钢铁大型企业的日负荷和一典型指数增长序列进行了预报,其计算结果见表 1,表 2,表 3,表 4.

绝对平均百分误差 $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{X(i) - \hat{X}(i)}{X(i)}\right|$, 误差绝对和 $= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{X(i) - \hat{X}(i)}{X(i)}\right|$, 绝对平均和 $= \sum_{i=1}^{n}(\hat{X}(i) - X(i))$. 其中 $X(i)$ 表示第 i 个原序列值,$\hat{X}(i)$ 表示由各种预测方法得到的第 i 个预测值。



—— 实际值;
—— 普通 GM(1,1) 模型;
--- 单目标模型, λ = 0.687 328;
---- 多目标模型, λ = 0.701 994 5
图 1　负荷预测曲线图

表 1　模型精度比较

绝对平均百分误差(%)	绝对误差和	误差平方和	备　注
3.279 419	74 595	478 579 648	普通 GM(1,1) 模型
1.653 859	37 568	94 469 016	多目标模型, λ = 0.701 994 5, 其中 $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$
1.655 366	37 559	94 443 576	误差平方和最小模型、λ = 0.687 328
1.658 344	37 542	94 569 752	误差绝对值和最小模型, λ = 0.734 556
1.653 859	37 568	94 469 016	百分误差绝对值和最小模型, λ = 0.897 644 1

对一指数增长序列：$X^{(0)} = \{2,4,8,16,32,64,128,256,512\}$ 进行预测，见表 3.

表 2　日负荷的预测　　kW·h

时间	实际值	普通 GM(1,1) 模型		GM(1,1,0.687 328) 模型（以误差平方和最小为目标）	
		预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
1 点	85 800	85 800	0.000 000	85 800	0.000 000
2 点	858 00	863 07	0.591 364	86 316	0.391 754
3 点	858 000	87 027	1.429 533	86 492	0.807 046
4 点	92 400	87 752	−5.030 658	90 046	−2.547 509
5 点	85 800	88 483	3.126 867	87 259	1.700 940
6 点	85 800	89 220	3.986 160	87 562	2.053 094
7 点	85 800	89 964	4.852 619	87 917	2.466 984
8 点	85 800	90 713	5.726 289	88 273	2.881 875
9 点	92 400	91 469	−1.007 559	91 964	−0.472 056
10 点	92 400	92 231	−0.182 723	92 405	0.005 944
11 点	99 000	93 000	−6.060 937	95 948	−3.082 776
12 点	92 400	93 775	1.487 647	93 226	0.894 455
13 点	99 000	94 556	−4.488 944	96 770	−2.252 723
14 点	99 000	95 344	−3.693 103	97 235	−1.783 026
15 点	92 400	96 138	4.404574	94 379	2.142 113
16 点	99 000	96 939	−2.081 487	98 001	−1.008 602
17 点	99 000	97 747	−1.265 593	98 468	−0.537 539
18 点	99 000	98 562	−0.442 898	98 880	−0.121 362
19 点	99 000	99 383	0.386 648	99 291	0.293 876
20 点	105 600	100 211	−5.103 338	102 886	−2.569 832
21 点	105 600	100 211	−5.103 338	102 886	−2.569 832
22 点	105 600	101 046	−4.312 618	103 379	−2.103 642
23 点	99 000	102 737	3.774 542	100 990	2.009 612
24 点	92 400	103 593	12.113 459	97 831	5.878 170

表 3　模型精度比较

绝对平均百分误差(%)	绝对误差和	误差平方和	备　注
10.798 757 0	86.629 284 00	2 983.595 980 0	普通 GM(1,1) 模型
0.000 010 106 5	0.000 093 29	0.000 000 003 8	多目标模型，$\lambda = 0.557\,305$，其中 $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$
0.000 010 106 5	0.000 093 29	0.000 000 003 8	误差平方和最小模型，$\lambda = 0.55\,7\,305$
0.000 010 106 5	0.000 093 29	0.000 000 003 8	误差绝对值和最小模型，$\lambda = 0.557\,305$
0.000 010 106 5	0.000 093 29	0.000 000 003 8	百分误差绝对值和最小模型，$\lambda = 0.557\,305$

表 4 预测结果

实际值	普通 GM(1,1) 模型		GM(1,1,0.687 328) 模型（以误差平方和最小为目标）	
	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
2	2.000 00	0 000 000 0	2.000 000	0.000 000
4	3.790 94	-5.226 596	4.000 000	0.000 003
8	7.383 74	-7.703 307	8.000 000	0.000 005
16	14 381 50	-10.115 290	16.000 010	0.000 008
32	28.011 40	-12.464 250	32.000 030	0.000 011
64	54.558 80	-14.751 820	64.000 090	0.000 014
128	106.266 00	-16.979 610	128.000 023	0.000 018
256	206.978 00	-19.149 180	256.000 057	0.000 022

4 结 论

笔者对 GM(1,1) 模型的建模机理进行深入研究，建立了 GM(1,1,λ) 模型，当 $\lambda = 0.5$ 时，GM(1,1,λ) 模型即为 GM(1,1) 模型。为求解 λ 的值，文中给出了以误差平方和最小为目标、误差绝对值之和最小为目标、百分误差绝对值之和最小为目标的优化模型，并给出以上述三者为目标的多目标模型，求解 λ 的值，即可得到相应的预测值。通过实例分析，表明该方法具有较大的适应性，提高了预测精度，拓展了灰色预测的范围。

参 考 文 献

1 邓聚龙．灰色系统理论教程．武汉：华中理工大学出版社，1990．175～264

2 邓聚龙．灰色预测与决策．武汉：华中理工大学出版社，1986．50～150

3 罗桂荣，陈炜．灰色系统模型的一点改进及应用．系统工程理论与实践，1988，8(2)：46～51

4 于德江．灰色系统建模方法探讨．系统工程，1991，9(5)：9～12

5 陈涛捷．灰色预测模型的一种拓广．系统工程，1990，8(4)：50～52

6 朱宝璋．关于灰色建模的模型精度问题的研究．系统工程，1991，9(5)：13～19

7 Gill P E, Murray W. quasi-Newton methods for unconstrained optinization. J Inst Maths Applns, 1972, 9: 91～108

8 袁亚湘．非线性规划数值方法．上海：上海科学技术出版社，1993．77～116

Generalization and Application of the Gray Model

Zhou Ping Xie Kaigui Zhou Jiaqi

(College of Electrical Engineering, Chongqing University)

ABSTRACT Gray model GM(1,1) has been improved with the difference scheme and the GM (1,1,λ) model has been set up. So the applying fields of GM(1,1) have been expanded. Solving the value of λ, the prime data are forecasted.

KEYWORDS gray models / difference scheme; optimization models

（责任编辑 李胜春）