文章编号:1000－582x(1999)03-0045-08

⑧

45－52

有向功能关系图 OFRG 功能的代数实现算法及图意义*

TG801

李 斌[1], 张根保[2], 徐宗俊[2]
(1. 重庆大学 自动化学院,重庆 400044; 2. 重庆大学 机械工程学院,重庆,400044)

TH122

摘 要:研究了计算机辅助建立产品(零部件)链路方程问题。提出 0－1 矩阵、矩阵广义伴随等概念。给出矩阵留位乘法、乘方法两种寻找链路的方法。所得链路方程是产品拓扑与几何信息的有机结合体,便于计算机辅助建立功能方程。

关键词:计算机辅助设计;公差/链路方程
中图分类号:TG 801; TG 802 **文献标识码**:A

OFRG, 有向功能关系图, 公差设计, CAD,

公差设计在很大程度上决定着产品质量与制造成本。而对产品的拓扑与几何层次的描述,以及这两类信息的有机结合是建立产品整体模型的关键,更是计算机辅助公差设计中应首先研究并加以解决的基本问题。

文[1]在产品装配级提出描述该级各零部件间拓扑关系的 OFRG 图模型。文[2]推广 OFRG 到零、部件级,提出整体描述产品的三极 OFRG 概念。并提出各级 OFRG 的连接关系,从而得到产品拓扑与几何描述有机结合的产品系统模型框架。

笔者旨在研究根据各级 OFRG 寻找顶点位、连接向量、跨接向量及零(部)件向量[2]间关系的算法。即建立产品(零部件)链路方程,也就是寻找产品拓扑与几何描述的关系问题。

一般 OFRG 为一有向弱连通简图[2]。令 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为其节点,$u_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为其弧,与任两节点 v_i、v_j 关联的弧 $u_{ij} \triangleq (v_i, v_j)$($u_{ij}$ 由 v_i 指向 v_j).

1 概 念

1) 0－1 矩阵

定义 1 对于 OFRG 存在如下矩阵 $\mathbf{A}(0)_{n\times n}$

$$\mathbf{A}(0)_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & u_{ij}\text{ 存在, 且 } i \neq j \\ 0 & i = j \\ 0 & u_{ij}\text{ 不存在, } i \neq j \end{cases}$$

* 收稿日期:1998-07-07
作者简介:李斌(1958-),男,重庆人,讲师,重庆大学博士生,主要从事自动控制理论及计算机辅助设计研究。

称矩阵 $\mathbf{A}(0)$ 为对应OFRG的0－1矩阵。$\mathbf{A}(0)$ 是OFRG逻辑结构的一种代数表现形式。

2) 矩阵 $M_{(n-1)\times m}$[2] 的广义伴随阵 $\mathbf{P}$

定义2 行满秩矩阵 $\mathbf{M}_{(n-1)\times m}$ 的广义伴随阵 $\mathbf{P}$ 为：$\mathbf{P} \triangleq \det(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)\mathbf{M}^-$.

其中：$\boldsymbol{M}$ 为OFRG关于某节点的关联矩阵[4,6]，$\mathbf{M}^-$ 为其广义逆矩阵[5]。

矩阵 $\mathbf{P}$ 有重要的图意义。

3) 矩阵的留位乘法

定义3 若矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times m}$, 且 $C_{ij\,k} = a_{ij}b_{jk}$, $C_{ij\,k}$ 中 ij 为行标，k 为列标，则称乘积张量 $\mathbf{C}(C_{ij\,k})$ 为 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的留位乘积。记作 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

2 基本理论

现在研究文[2]结论的理论依据及意义。用 p 表示OFRG任两节点间的道路或半道路，简称路。用C表示回路。不失一般性用 $\mathbf{M}_n$ 表示OFRG关于某节点 v_n 的关联矩阵。

2.1 矩阵 $(\mathbf{M}_n)_{(n-1)\times m}(\operatorname{rank}\mathbf{M}_n = n-1)$ 广义伴随阵 $\mathbf{P}_n$ 的意义

1) 路向量 $\boldsymbol{p}_j$ 与关联矩阵 $\mathbf{M}_n$

定义4 称 m 维向量 $\boldsymbol{p}_j$ 为OFRG中 v_j 到 v_n 的路向量

$$(\boldsymbol{p}_j)_i \triangleq \begin{cases} 1 & u_i \text{ 在 } v_j \text{ 到 } v_n \text{ 的路上，且指向 } v_n, \\ -1 & u_i \text{ 在 } v_j \text{ 到 } v_n \text{ 的路上，且指向 } v_j, \\ 0 & u_i \text{ 不在 } v_j \text{ 到 } v_n \text{ 的路上,} \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \cdots, m$$

下述定理说明向量 $\boldsymbol{p}_j$ 与 $\mathbf{M}_n$ 的关系。

定理1 OFRG路向量 $\boldsymbol{p}_j$ 与 $\mathbf{M}_n$ 之积为 $n-1$ 维单位向量。且 $m_i\boldsymbol{p}_j = \delta_i^j$，其中 m_i 为 $\mathbf{M}_n$ 中第 i 行向量。δ_i^j 为Kronecker的 δ.

证明：设 $\boldsymbol{p}_j$ 为OFRG中 v_j 到 v_n 的一个路向量，$u(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ 为 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的弧集合。

i) 当 $i = j$ 时，v_i 为 $\boldsymbol{p}_j$ 的一个端点，只与 $\boldsymbol{p}_j$ 的一条弧 $u_k \in u$ 相关联，故 $m_i\boldsymbol{p}_j = m_{ik}(\boldsymbol{p}_j)_k$. 根据 $\mathbf{M}_n$, $\boldsymbol{p}_j$ 的定义知，$m_{ik} = (\boldsymbol{p}_j)_k$，故有 $m_i\boldsymbol{p}_j = 1$.

ii) 当 $i \neq j$ 时

a) 若 v_i 在 $\boldsymbol{p}_j$ 上，则 v_i 只与 u 中两元素 u_{i_1}，u_{i_2} 相关联，故 $m_i\boldsymbol{p}_j = m_{ii_1}(\boldsymbol{p}_j)_{i_1} + m_{ii_2}(\boldsymbol{p}_j)_{i_2}$. 根据定义又有 $m_{ii_1}(\boldsymbol{p}_j)_{i_1} = -m_{ii_2}(\boldsymbol{p}_j)_{i_2}$，故有 $m_i m_j = 0$.

b) 若 v_i 不在 $\boldsymbol{p}_j$ 上，则 v_i 与 u 各元均无关联，故 $m_i\boldsymbol{p}_j = 0$.

综上所述，$m_i\boldsymbol{p}_j = \delta_i^j$ 定理得证。

定理2 设 $\boldsymbol{p}_j$ 为由0, 1, －1组成的 m 维向量。若对所有的 i, $m_i\boldsymbol{p}_j = \delta_i^j$，则 $\boldsymbol{p}_j$ 决定一从 v_n 到 v_j 的路。

证明 只要 v_j 到 v_n 存在路，则其路向量 $\boldsymbol{p}_j$ 定满足 $m_i\boldsymbol{p}_j = \delta_i^j$. 故凡满足此式的0、1、－1，向量即为 v_j 到 v_n 的路向量，因此 $\boldsymbol{p}_j$ 决定从 v_j 到 v_n 的路。定理证毕。

定理1、2说明OFRG中任意两顶点的一个路向量与对应 $\mathbf{M}_n$ 的关系，若此两点有多于一条的路，这些路向量的组合与对应 $\mathbf{M}_n$ 有下述关系。

2) 路向量组合与关联矩阵 $\mathbf{M}_n$

设 $p_j^1, \cdots, p_j^r$ 是 v_j 到 v_n 的 r 个路向量，则：

定理3　路向量 $p_j^1, p_j^2, \cdots, p_j^r$ 的非负线性组合与 M_n 之积具有：

① $m_i(k_1 p_j^1 + k_2 p_j^2 + \cdots + k_r p_j^r) > 0,\ i = j$

② $m_i(k_1 p_j^1 + k_2 p_j^2 + \cdots + k_r p_j^r) = 0,\ i \neq j$

其中：$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为组合系数（$k_l \geqslant 0,\ l = 1,2,\cdots, r$，且不同时为零）。

证明：i) 当 $i = j$ 时，

$$m_i \sum_{l=1}^{r} k_l p_j^l = \sum_{l=1}^{r} k_l m_i p_j^l \tag{1}$$

根据定理1，$m_i p_j^l = 1$，故有 $m_i \sum_{l=1}^{r} k_l p_j^l = \sum_{l=1}^{r} k_l$。因 $k_l(l = 1,2,\cdots, r) \geqslant 0$，且不同时为零，故得 $m_i \sum_{l=1}^{r} k_l p_j^l > 0$.

ii) 当 $i \neq j$ 时，

同理　$m_i p_j^l = 0$，故 $m_i \sum_{l=1}^{r} k_l p_j^l = 0$.

综合 i)，ii) 知定理成立。

3) 路向量组合与关联矩阵 M_n 的广义逆矩阵 P_n

定理4　OFRG关于 v_n 的关联矩阵 M_n 的广义伴随阵 P_n 各列由除 v_n 外的各顶点到 v_n 的路向量 $p_j(j = 1,2,\cdots, n-1)$ 的非负线性组合 $p_j(k_j)$ 构成。其中 k_r 表示对应组合系数组成的向量 $k_r = (k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{rj})$.

证明　由定理3有

$$M_n(p_1(k_1), p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1})) = \mathrm{diag}\left(\sum_{l_1=1}^{r_1} k_{l_1}, \sum_{l_2=1}^{r_1} k_{l_2}, \cdots, \sum_{l_{n-1}=1}^{r_{n-1}} k_{l_{n_1}}\right)$$

令　$\sum_{l=1}^{r_j} k_{l_j} = \det(M_n M_n^T)$　　$(j = 1,2,\cdots, n-1)$

则　$M_n(p_1(k_1)p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1})) = \det(M_n M_n^T) I_{(n-1)\times(n-1)}$

因OFRG非空　$\det(M_n M_n^T) > 0$[4].

且　$$M_n(p_1(k_1)p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1}))M_n/\det(M_n M_n^T) = M_n$$

根据广义逆的定义

$$(p_1(k_1)p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1}))/\det(M_n M_n^T) = M_n^-$$

则　$$(p_1(k_1)p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1})) = \det(M_n M_n^T)M_n^-$$

根据定义1，矩阵 $(p_1(k_1)p_2(k_2)\cdots p_{n-1}(k_{n-1}))$ 为 M_n 的广义伴随阵 P_n，定理得证。

由定理2知，OFRG的 M_n^- 或 P_n 的任一列 j 至少包含一条 v_n 到 v_j 路的结构信息。为求出 v_n 到 v_j 的全部路结构信息，给出下述定义和定理。

2.2　齐次线性方程组 $M_n X = 0$ 一般解的图意义

1) 回路向量 C_j 与关联矩阵 M_n

定义5　对OFRG的任一有向回路 C_j 有 m 维向量 c_j，且

$$(c_j)_i \triangleq \begin{cases} 1 & u_i \in c_j\text{，且与 } c \text{ 同向} \\ -1 & u_i \in c_j\text{，且与 } c \text{ 反向} \\ 0 & u_i \notin c_j \end{cases}$$

称 c_j 为 OFRG 的回路向量。由此有

定理 5 OFRG 中任一回路向量 c_j 与 M_n 中行向量正交。

证明　不失一般性，设 $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{rj}, c_{r+1,j}, \cdots, c_{mj})$，其中 $c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{rj}$ 非零。m_i 为 M_n 的第 i 行向量。

则 $$m_i c_j = \sum_{l=1}^{m} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} m_{il} c_{lj}$$

i）当 $v_i \notin c_j$，由于此时 v_i 与 c_j 各弧均无关联，故 $m_i c_j = 0$.

ii）当 $v_i \in c_j$，v_i 与且只与 c_j 中两弧相关联，此时 $m_i c_j = m_{il_1} c_{l_1 j} + m_{il_2} c_{l_2 j}$，$l_1$，$l_2$ 属于 $(1, 2, \cdots, r)$.

根据 M_n，c_j 定义，必有

当 $m_{il_1} = m_{il_2}$ 时，$c_{l_1 j} = -c_{l_2 j}$，当 $m_{il_1} = -m_{il_2}$ 时，$c_{l_1 j} = -c_{l_2 j}$，故 $m_i c_j = 0$.

综合 i）、ii）定理得证。

2）回路向量的组合与关联矩阵 M_n

定理 6 OFRG 的所有回路向量的非负线性组合与 M_n 行向量正交。

证明略。

3）砌合空间与广义环路空间

OFRG 的 M_n 的 $n-1$ 个线性无关行向量构成一组基，由这组基决定的空间是 m 维空间的一个 $n-1$ 维子空间，称为 OFRG 的砌合空间[96]。OFRG 所有回路向量及非负线性组合构成 m 维空间的一个 $m-n+1$ 维子空间，称为 OFRG 的广义环路空间。其上的元称为广义环路向量，记为 b，由定理 6 知，广义环路空间是砌合空间的正交补空间。据此有下述定理。

定理 7 OFRG 的广义环路空间可表示为 $(I_m - M_n^- M_n) l$，这里 l 为任意 m 维向量。

证明　由定理 6 知，广义环路向量满足方程 $M_n x = 0$，(x 为 m 维向量)。

其一般解为 $x = (I_m - M_n^- M_n) l$[5]，(l 为任意 m 维向量). 知 $\mathrm{rank}(I_m - M_n^- M_n) = m - n + 1$，故 $(I_m - M_n^- M_n) l$ 表示 OFRG 的广义环路空间。

由定理 7 知，m 阶方阵 $I_m - M_n^- M_n$ 中的 $m-n+1$ 个线性无关列向量为 OFRG 中的广义环路向量。令其构成的矩阵为 B，任意 $m-n+1$ 维向量 α_1，则 OFRG 的广义环路空间可表示为 $B\alpha_1$，且 $M_n B\alpha_1 = 0$.

2.3　线性相容方程组 $M_n x = I_{n-1}$ 一般解的图意义

由定理 1、2、3 知，OFRG 顶点 v_j 到 v_n 的路向量 p_j 及其特殊的非负线性组合，满足方程 $M_n x_j = e_j$，($j = 1, 2, \cdots, n-1$)，合并 $n-1$ 个方程得 $M_n x = I_{n-1}$，于是有如下定理。

（1）一般 OFRG

定理 8 OFRG 关于 v_n 的全部路向量包含在方程 $M_n x = I_{n-1}$ 的一般解 $M_n^- + (I_m - M_n^- M_n) L$ 中。其中 L 为任意适当阶的矩阵。

证明　方程 $M_n x = I_{n-1}$ 的一般解为 $X = M_n^- + (I_m - M_n^- M_n) L$，由路向量 p 与 M_n 的

关系定理1、2、3知OFRG关于 v_n 的全部路向量包含在 $M_n^- + (I_m - M_n^- M_n)L$ 中。

由此可知，若称 p_j 的和1非负线性组合为路束向量 $p(j)$，则 $p(j)$ 与广义环路向量 b_i 的代数和仍为路束向量。p_j 为一特殊的路束向量（和1，即组合系数之和为1）。

2）树型OFRG

定理9　对树型OFRG（$m = n-1$），关联矩阵 M_n 的广义逆 $M_n^- = M_n^{-1}$（普通逆），且 M_n^{-1} 的各列向量为对应顶点到 v_n 的路向量。

证明　因 $m = n-1$，M_n 为 $n-1$ 阶方阵，且 $\operatorname{rank} M_n = n-1$，故 $M_n^- = M_n^{-1}$，根据 $\det(M_n M_n^T)$ 的图意义，此时 $\det(M_n M_n^T) = 1$。故 $M_n^- = M_n^{-1} = M_n^*$，且 $M_n M_n^* = I_{n-1}$，（M_n^* 为 M_n 的伴随阵）根据定理4，M_n^* 的各列向量为对应顶点到 v_n 路向量的和非负线性组合，而树型OFRG任意两顶点间，有且只有唯一路向量，故知 M_n^{-1} 的各列向量为对应顶点到 v_n 的路向量。

根据上述定理，此时方程 $M_n x = I_{n-1}$ 有唯一解：$x = M_n^{-1}$ 为路向量矩阵。

3　寻找链路的方法

3.1　寻找路向量

1）对上述结论加以修改，将得出求取全部路向量的方法

对任一OFRG关于 v_n 的关联矩阵 M_n，存在一 m 阶置换阵 Q，且 $M_n Q = (M_{1n}\ T_n) = M(n)$，其中 $T_n((n-1)\times(n-1))$ 为OFRG某跨接树关于 v_n 的关联矩阵 $\operatorname{rank} T_n = n-1$，$M_{1n}((n-1)\times(m-n+1))$ 为其连枝组成的关于 v_n 的关联矩阵。根据矩阵广义逆的定义，易知，矩阵 $(0\quad (T_n^{-1})^T)^T = P_{m\times(n-1)}$ 为 $M(n)$ 的一个广义逆 $M^-(n)$。

实际上，$M(n)PM(n) = (M_{1n}\ T_n)\begin{pmatrix}0\\ T_n^{-1}\end{pmatrix}(M_{1n}\ T_n) = I_{n-1}(M_{1n}\ T_n) = M(n)$ 由定理9知，$M^-(n)$ 的各列向量为OFRG中除 v_n 外各对应点到 v_n 的一个路向量。

而此时，$I_m - M^-(n)M(n) = \begin{pmatrix} I_{m-n+1} & 0\\ -T_n^{-1}M_{1n} & 0\end{pmatrix} = (B_f\, 0)$。

由图论知，$B_f = (I_{m-n+1}\ -M_{1n}^T(T_n^{-1})^T)^T$ 为OFRG关于 T_n 的基本回路矩阵。故方程组 $M_n x = I_{n-1}$ 的解可表为：

$$X = Q = M^-(n) + (I_m - M^-(n)M(n))l]$$

$$= Q\left[\begin{pmatrix}0\\ T_n^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{m-n+1} & 0\\ -T_n^{-1}M_{1n} & 0\end{pmatrix} l\right]$$

则

$$X = Q\left[\begin{pmatrix}0\\ T_n^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{m-n+1}\\ -T_n^{-1}M_{1n}\end{pmatrix} l_1\right] = Q(P + B_f l_1)$$

其中 l_1 为 $(m-n+1)\times(n-1)$ 阶矩阵

若引入环和 $\oplus$，极小化min运算[5]，限 l_1 之元在[0，1]中取整数值，则 $X = \min Q(P \oplus B_f l_1)$ 即为OFRG关于 v_n 的全部路向量表达式。并且 $\min QB_f l_1$ 为OFRG的全部回路向量。

2）0－1矩阵 $A(0)$ 乘方法

若 $\mathbf{A}^k(0) \triangleq \overbrace{A(0)A(0)\cdots A(0)}^{k}$，则

定理 10 $[A^k(0)]_{ij}$ 为 OFRG 中 v_i 到 v_j 长为 k 的路的条数。

定理 11 $[\mathbf{A}^{k-l}(0)]_i$ 同$[\mathbf{A}^l(0)]^j$ 进行与运算，结果中各非零元对应的顶点为 v_i 到 v_j 路的中间点。其中$[\mathbf{A}^{k-l}(0)]_i$ 表示 $\mathbf{A}^{k-l}(0)$ 的第 i 行向量，$[\mathbf{A}^l(0)]^j$ 表示 $\mathbf{A}^l(0)$ 第 j 列向量。k, l 均为整数。

由于 OFRG 顶点数有限，根据归纳法，作有限步的运算即可求得 v_j 到 v_j 长度为 k 各路的结构（顶点序列）。据此不难求得 v_i 到 v_j 的全部顺路向量（路中各弧方向相同）。

若要求一般路向量可利用 OFRG 的邻接矩阵求乘方的方法求取[5]。

3.2 链路方程的建立

根据文[2] 及 2 中所述，OFRG 关于 v_n 的链路方程包含在下式中

$$\mathbf{R}_n = -[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{M}_n^- + (\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{M}_n^-\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{l})]^{\mathrm{T}}[\ln] \tag{1}$$

由 3.1 知，OFRG 关于 v_n 的所有链路可表为：

$$\mathbf{R}_n = -[\mathbf{K}(\min Q(\mathbf{P} \oplus \mathbf{B}_f)\boldsymbol{l}_1)]^{\mathrm{T}}[\ln] \tag{2}$$

若欲求链路(v_j, v_n)，则有

$$\mathbf{R}_{nj} = -[\mathbf{K}(\min Q(\mathbf{P}e_j \oplus \mathbf{B}_f)\boldsymbol{l}_1)]^{\mathrm{T}}[\ln] \tag{3}$$

这里 e_j 为第 j 个元为 1 的单位向量。l_1 为$(m-n+1)\times 1$ 的列向量，其元在[0,1] 中取整数值。

显然，当 OFRG 为树型图时有：

$$\mathbf{R}_n = -(\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_n^-)^{\mathrm{T}}[\ln] \tag{4}$$

$$\mathbf{R}_{nj} = -(\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_n^- e_j)^{\mathrm{T}}[\ln] \tag{5}$$

若令 $\boldsymbol{k} = (k_{11}\ k_{12}\ \cdots\ k_{1n}, k_{21}\ k_{22}\cdots k_{2n}, \cdots, k_{n1}\ k_{n2}\cdots k_{nn})^{\mathrm{T}}$，利用留位乘法，方程组(2)、(3)，(4)，(5) 可写为

$$m > n,\ \mathbf{R}_n = -[\boldsymbol{M}_e \otimes (\min Q(\mathbf{P} \oplus \mathbf{B}_f)\boldsymbol{l}_1]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \tag{2'}$$

$$\mathbf{R}_{nj} = -[\boldsymbol{M}_e \otimes (\min Q(\mathbf{P}e_j \oplus \mathbf{B}_f)\boldsymbol{l}_1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \tag{3'}$$

$$m = n-1,\ \mathbf{R}_n = -(\boldsymbol{M}_e \otimes \boldsymbol{M}_n^-)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \tag{4'}$$

$$\mathbf{R}_{nj} = -(\boldsymbol{M}_e \otimes \boldsymbol{M}_n^- e_j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \tag{5'}$$

当然利用留位乘法及广义逆系数分离技术，(1) 式也可表示为

$$\mathbf{R}_n = -[\boldsymbol{M}_e \otimes \boldsymbol{M}_{np}^-]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} \tag{1'}$$

这里 $\boldsymbol{M}_{np}^-$ 表示 $\boldsymbol{M}_n^-$ 按列分离系数的结果。

4 结论与实例

4.1 本文的主要结论及意义

1) 产品链路方程的普遍公式

公式(1′)、(2′)、(3′)、(4′)、(5′) 在理论及算法研究中均具有重要价值。用它可对三级 OFRG 及整个产品的拓扑结构进行完整分析，其拓扑与几何意义明确，形式规范、简捷，从根本上改变了 OFRG 结构分析的原始方法。

2）矩阵留位乘法

矩阵留位乘法实现了产品拓扑与几何信息的分离，便于处理，同时又将两者有机地联系在一起，形成完整的产品链路方程。

3）求取链路方程的关键在于求取路向量，笔者提出的两种方法均能实现这一目的。解线性方程组法既可求取路向量，又可求取回路向量，这对功能方程的建立是非常重要的。对求得的路向量进行简单分析，既可识别出误差传动链，尺寸链，以及相应的关键尺寸、零件或部件。

4）这里的方法与结论有多方面的应用领域，更是首次应用于计算机辅助公差设计的研究中。据此基本解决了OFRG逻辑功能的实现问题。

现举一例说明结论的应用：

图1为一部件图，选 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{L}_3$、$\boldsymbol{L}_4$、$\boldsymbol{L}_5$ 为部件向量，$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 为功能向量，A、B、C、D、E为对应原点，求关于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 的链路方程。

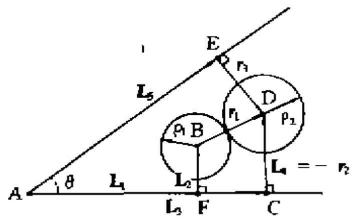

图1　部件图

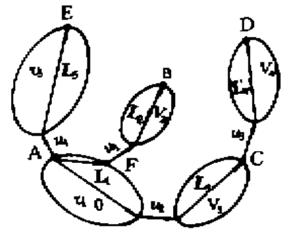

图2　部件OFRG

选D点为基点 v_n，作部件OFRG如图2，由此知，OFRG的 $m=4$，$n=5$，完全关联矩阵 $\mathbf{M}_e$ 与关于 v_4 的关联矩阵 $\mathbf{M}_4$ 分别为：

$$\boldsymbol{M}_e=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ \mathbf{M}_4=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}_4^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

设部件连接向量组 $\boldsymbol{k}=(k_{11},k_{12},\cdots,k_{54})^{\mathrm{T}}$，其中非零元 $k_{11}=\mathbf{L}_1$，$k_{21}=-\mathbf{L}_2$，$k_{32}=-\mathbf{L}_3$，$k_{43}=-\mathbf{L}_4$，$k_{54}=-\mathbf{L}_5$ 代公式(4′)得OFRG关于 v_4 的位方程：

$$\mathbf{R}_4=-(\boldsymbol{M}_e\otimes\boldsymbol{M}_4^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}$$

其中

$$(\boldsymbol{M}_e\otimes\boldsymbol{M}_4^{-1})^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\-1&1&0&0&1&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则求得所需链路方程如下：

$$r_1 = k_{11} - k_{12} - k_{21} + k_{32} - k_{33} + k_{43} = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$$

$$r_2 = k_{33} + k_{43} = - L_4$$

$$r_3 = - k_{12} + k_{14} + k_{32} - k_{33} + k_{43} - k_{54} = - L_3 - L_4 + L_5$$

上述方程表明了 OFRG 中部件向量与功能向量间的关系。据此可判断关键尺寸、计算功能公差的敏度系数及判断公差类型[1] 等特征。

参 考 文 献

[1] ZHANG G, PORCHER M. Some New Development in Tolerance Design in CAD[J]. The ASME 1993 Design Automation conference, New Mexico:[s.n.], 1993.19～22

[2] 李斌，张根保，徐宗俊．有向功能关系图 OFRG 功能实现的代数方法[J]．重庆大学学报(自然科学版)，1999，22(2)：1～7

[3] 张根保，王时龙，徐宗俊．先进制造技术[M]．重庆：重庆大学出版社，1996．136～139

[4] BONDY J A. Graph Theory with applications[M]. Ontario Canada: Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, 1976.239～248

[5] 李乔．矩阵论八讲[M]．上海：上海科学技术出版社，1988．139～145

[6] 王朝瑞．图论[M]．北京：北京工业学院出版社，1987．268～281

[7] J 维滕伯格．多刚体系统动力学[M]．北京：北京航空学院出版社，1986

Algebric Method for Realization of the Function of Oriented Functional Relationship Graph and Its Graphical Significance

LI Bin[1], ZHANG Gen-bao[2], XU Zong-jun[2]

(1. College of Automation Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. College of Mechanical Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: The problems of building the equations of chain-walk of products(elements or components) with computer-aided method are studied. The concepts of the 0-1 matrix、the generalized adjoint matrix of a matrix are put forward. Two methods of finding the equations of chain-walk, the product of matrices which keeps its bits and the method of involution, are proposed. The resulatant chain-walk equations are the organic combining forms, including the topological and geometrical information of a product. They are convenient for setting up the function equations with computer-aided method.

KEYWORDS: computer-aided design; tolerancing / equation of chain-walk

（责任编辑 张小强）