1999年11月 重庆大学学报 (自然科学版) Vol.22
第22卷第6期 Journal of Chongqing University(Natural Science Edition) Nov.1999

文章编号:1000-582x(1999)06-0121-05

21

121-126

# 批到达穷尽服务轮询系统分析*

O226

雷玉洁[1], 孙荣恒[2]
(1. 重庆第三军医大学 数学教研室,重庆 400038; 2. 重庆大学 理学院,重庆 400044)

**摘 要**: 研究了具有批到达非对称的穷尽服务轮询系统的各站轮询时刻的平均队长、服务器的轮询周期和在各站的停留时间、访问间隔时间等的分布与均值以及顾客逗留时间的分布。

**关键词**: 批到达; 穷尽服务; 轮询系统; 队长; 逗留时间

排队

**中图分类号**: O 226 **文献标识码**: A

随着计算机网络和计算机通信的飞速发展,人们对轮询系统进行了深入的研究[1,2],并将其应用到实际工作中。然而,对具有批到达非对称的特殊轮询系统的研究却很少有文献涉及。轮询系统是指具有一个服务器和N个站(N个队列)的依次循环服务系统。穷尽服务是指当服务器轮询到一个站时,如果该站的顾客在等待服务,它就立刻为该站的顾客服务一直到该站没有顾客为止才离开该站。

设第 $i$ 站的输入过程为强度是 $\lambda_i$ 的泊松过程 $\{N_i(t), t\geq 0\}$,每次到达为一批($\xi_i$ 个)信元(或顾客)。设 $i$ 站第 $n$ 批到达的信元数为 $\xi_{ni}$, $\{\xi_{ni}, n>1\}$ 为独立同分布取正整数的随机变量序列,且均与 $\xi_i$ 同分布,$\xi_i$ 的二阶矩存在,$E(\xi_i)=\alpha_i$. $\xi_i$ 的概率母函数(PGF)为 $P_i(z_i)$. $R_i$ 表示服务器从第 $i$ 站到第 $i+1$ 站的行走(转换)时间,用 $R_i^*(s)$、$r_i$ 分别表示 $R_i$ 的拉普拉斯-司蒂阶变换(LST)、一阶(原点)矩。到达第 $i$ 站的顾客按先来先服务规则等待服务,诸服务时间 $B_i$ 独立同分布,且 $E(B_i)=1/\beta_i$. 各站输入过程、所有服务时间、所有行走时间均相互独立,各站缓冲器容量无限。令 $R=\sum_{j=1}^{N} r_j$, $\rho_j=\lambda_i\alpha_i/\beta_i$, $\rho=\sum_{j=1}^{N}\rho_j$.

设 $L_i(t)$ 为时刻 $t$ 第 $i$ 站的队长(顾客数), $\tau_i(m)$ 为服务器第 $m$ 次轮询到第 $i$ 站的时刻。$L_i(\tau_j)=\lim_{m\to\infty}L_i(\tau_j(m))$ 为平稳条件($\rho<1$)下服务器轮询到第 $j$ 站时第 $i$ 站的队长。$i$、$j=1,2,\cdots,N$. $Q_i$ 为在平稳条件下第 $i$ 站一个顾客被服务完离开系统时第 $i$ 站的队长。$\bar{Q}_i(z)$、$\bar{G}_i(z)$ 分别为 $Q_i$、$L_i(\tau_i)$ 的PGF. $I_i$ 为服务器访问 $i$ 站的间隔时间。$I_i^*(s)$ 为 $I_i$ 的LST. $\delta_i$、$\nu_i$ 为 $I_i$ 的年龄与剩余时间。$B_{ij}$ 为服务器在第 $i$ 站中第 $j$ 个顾客的服务时间,由假设知 $B_{i1}$、$B_{i2}$、$\cdots$ 相互独立且均与 $B_i$ 同分布。令 $C_i$、$T_i$ 分别为服务器轮询第 $i$ 站的周期与每次在 $i$ 站的停留

* 收稿日期:1999-01-25
基金项目:国家自然科学基金(69682011)
作者简介:雷玉洁(1970-),女,硕士,主要从事医学数学的教学和研究。

时间。规定 $\sum_{k=1}^{0}=0$.

**引理 1** 设 $\theta_i$ 为第 $i$ 站某个顾客引出的忙期，则

$$\theta_i^*(s)=B_i^*[s+\lambda_i-\lambda_iP_i(\theta_i^*(s))],\qquad E(\theta_i)=1/\beta_i(1-\rho_i)$$

证明：见文献[3].

**引理 2** 设 $P_i(s_1,s_2)$ 为 $(\delta_i,v_i)$ 的 LST，则

$$P_i(s_1,s_2)=[I_i^*(s_1)-I_i^*(s_2)]/E(I_i)(s_2-s_1)\qquad i=1,2,\cdots,N$$

且 $\delta_i^*(s)=v_i^*(s)=[1-I_i^*(s)]/sE(I_i)$

$$E(v_i)=E(I_i^2)/2E(I_i)=E(\delta_i)$$

证明：见文献[4].

**引理 3** 在穷尽服务轮询系统中，单个到达的情形下，有

$$\bar{Q}_i(z)=(1-\rho)B_i^*(\lambda_i-\lambda_iz)[\bar{G}_i(z)-1]/\lambda_iR(z-B_i^*(\lambda_i-\lambda_iz))$$

证明：见文献[1](4.29) 式。

## 2 主要结果

**定理 1** 对具有批到达的非对称穷尽服务轮询系统，设

$$G(z_1,z_2,\cdots,z_N)=E[\prod_{j=1}^{N}z_j^{L_j(\xi)}],\ F_i(z_1,z_2,\cdots,z_N)=E[\prod_{j=1}^{N}z_j^{L_j(\tau_i)}],\quad i=1,2,\cdots,N$$

则

$$F_{i+1}(z_1,z_2,\cdots,z_N)=R_i^*\Big[\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j-\lambda_jP_j(z_j))\Big]\times$$

$$F_i\Big(z_1,\cdots,z_{i-1},\theta_i^*\Big[\sum_{j\neq i}^{N}(\lambda_j-\lambda_jP_j(z_j))\Big],z_{i+1},\cdots,z_N\Big)\tag{1}$$

$$\bar{G}_i(z)=\prod_{j=1}^{N}R_j^*(\lambda_i-\lambda_iP_i(z))\times G[\theta_1^*(\lambda_i-\lambda_iP_i(z)),\cdots,\theta_{i-1}^*(\lambda_i-\lambda_iP_i(z)),$$

$$1,\theta_{i+1}^*(\lambda_i-\lambda_iP_i(z)),\cdots,\theta_N^*(\lambda_i-\lambda_iP_i(z))]\tag{2}$$

$$E[L_i(\tau_i)]=R\lambda_i\alpha_i(1-\rho_i)/(1-\rho)\tag{3}$$

证明：当服务器到达 $i+1$ 站时 $j$ 站 $(j\neq i)$ 的顾客数由三部分组成：服务器到达 $i$ 站时 $j$ 站的顾客数；在行走时间 $R_i$ 内到达 $j$ 站的顾客数；$i$ 站服务时间内到达 $j$ 站顾客数。由于顾客到达为批到达，用 $N_j(R_i)$ 表示在行走间隔时间 $R_i$ 内到达 $j$ 站的批数，而每次到达 $\xi_{jk}$ 个，则在 $R_i$ 内到达 $j$ 站的顾客数为 $\sum_{k=1}^{N_j(R_i)}\xi_{jk}$. 由于服务器每次在第 $i$ 站的停留时间为 $\sum_{l=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_{il}$，从而此时间内到达 $j$ 站的顾客为 $\sum_{k=1}^{N_j(\sum_{l=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_{il})}\xi_{jk}$ 个。于是得到：

$$L_i(\tau_{i+1})=\sum_{k=1}^{N_i(R_i)}\xi_{ik},\ L_j(\tau_{i+1})=L_j(\tau_i)+\sum_{k=1}^{N_j(R_i)}\xi_{jk}+\sum_{k=1}^{N_j(\sum_{l=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_{il})}\xi_{jk},\qquad j\neq i,j=1,2,\cdots,N\tag{4}$$

由于当服务器第 $m+1$ 次轮询到第 $i$ 站时第 $i$ 站的顾客数等于第 $m$ 个轮询周期中在所

有的行走间隔时间 $R_j$ 内到达第 $i$ 站的顾客数与除第 $i$ 站外服务器在所有站停留时间内到达第 $i$ 站的顾客数之和，故有

$$L_i(\tau_i(m+1)) = \sum_{j=1}^{N}\Big[\sum_{k=1}^{N_i(R_j)}\xi_{ik}\Big] + \sum_{j\neq i}^{N}\Big[\sum_{k=1}^{N_i\left(\sum_{l=1}^{L_j(\tau_j(m))}\theta_{jl}\right)}\xi_{ik}\Big] \tag{5}$$

则由泊松过程的独立增量性，得

$$F_{i+1}(z_1, z_2, \cdots, z_N) = E\Big[\prod_{j=1}^{N} z_j^{L_j(\tau_{i+1})}\Big] = E\Big[\prod_{j=1}^{N} z_j^{\sum_{k=1}^{N_j(R_i)}\xi_{jk}}\Big]\times E\Big[\prod_{j\neq i}^{N} z_j^{L_j(\tau_i)+\sum_{k=1}^{N_j\left(\sum_{l=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_{il}\right)}\xi_{jk}}\Big] \tag{6}$$

$\because$ $$E\Big[\prod_{j=1}^{N} z_j^{\sum_{k=1}^{N_j(R_i)}\xi_{jk}}\Big] = \int_0^{\infty} E\Big[\prod_{j=1}^{N} z_j^{\sum_{k=1}^{N_j(t)}\xi_{jk}}\Big]\mathrm{d}p\{R_i\leqslant t\} =$$

$$\int_0^{\infty}\prod_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} E\Big[z_j^{\sum_{k=1}^{n}\xi_{jk}}\Big]p\{N_j(t) = n\}\mathrm{d}p\{R_i\leqslant t\} =$$

$$\int_0^{\infty}\prod_{j=1}^{N} e^{-[\lambda_j-\lambda_j P_j(z_j)]t}\mathrm{d}p\{R_i\leqslant t\} = R_i^{*}\Big[\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j - \lambda_j P_j(z_j))\Big]$$

又

$$E\Big[\prod_{j\neq i}^{N} z_j^{L_j(\tau_i)+\sum_{k=1}^{N_j\left(\sum_{l=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_{il}\right)}\xi_{jk}}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\prod_{j\neq i}^{N} z_j^{\sum_{k=1}^{N_j\left(\sum_{l=1}^{n}\theta_{il}\right)}\xi_{jk}}\Big]E\Big[\prod_{j\neq i}^{N} z_j^{L_j(\tau_i)}\,\Big|\,L_i(\tau_i) = n\Big]\cdot$$

$$p\{L_i(\tau_i) = n\} = E\Big\{\Big[\theta_i^{*}\sum_{j\neq i}^{N}(\lambda_j - \lambda_j P_j(z_j))\Big]^{L_i(\tau_i)}\cdot\prod_{j\neq i}^{N} z_j^{L_j(\tau_i)}\Big\} =$$

$$F_i\Big(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, \theta_i^{*}\Big[\sum_{j\neq i}^{N}(\lambda_j - \lambda_j P_j(z_j))\Big], z_{i+1}, \cdots, z_N\Big)$$

将上述两结果代入(6)，即得(1)．由(5)，可得：

$$E[z^{L_i(\tau_i(m+1))}] = \prod_{j=1}^{N} R_j^{*}[\lambda_i - \lambda_i P_i(z)]\cdot\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_{i-1}=0}^{\infty}\sum_{k_{i+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\prod_{j\neq i}^{N}E\Big[z^{\sum_{k=1}^{N_i\left(\sum_{l=1}^{k_j}\theta_{jl}\right)}\xi_{ik}}\Big]\cdot$$

$$p\{L_j(\tau_j(m)) = k_j,\quad j\neq i, j = 1,2,\cdots,N\} =$$

$$\prod_{j=1}^{N} R_j^{*}[\lambda_i - \lambda_i P_i(z)]\cdot E\Big\{\prod_{j\neq i}^{N}[\theta_j^{*}(\lambda_i - \lambda_i P_i(z))]^{L_j(\tau_j(m))}\Big\}$$

令 $m\to\infty$，得(2)．

对(5) 两边求数学期望，并令 $m\to\infty$，得

$$E[L_i(\tau_i)] = \sum_{j=1}^{N}\lambda_i E(R_j)\cdot E(\xi_i) + \sum_{j\neq i}^{N}\lambda_i E[L_j(\tau_j)]\cdot E(\theta_j)\cdot E(\xi_i)\text{[由引理 1]}$$

$\therefore$ $$E[L_i(\tau_i)]/(1-\rho_i) = \lambda_i\alpha_i R + \lambda_i\alpha_i\sum_{j=1}^{N}E[L_j(\tau_j)]/\beta_j(1-\rho_j) \tag{7}$$

两边分别对 $i$ 求和，有 $\sum_{j=1}^{N}E[L_j(\tau_j)]/\beta_j(1-\rho_j) = R\rho/(1-\rho)$ 代入(7)，可得(3)．

**定理 2**　$\bar{G}_i(z) = I_i^{*}[\lambda_i - \lambda_i P_i(z)]$，　$E(I_i) = R(1-\rho_i)/(1-\rho)$ (8)

$$T_i^*(s)=\bar{G}_i[\theta_i^*(s)],\qquad E(T_i)=R\rho_i/(1-\rho) \tag{9}$$

$$C_i^*(s)=I_i^*[s+\lambda_i-\lambda_i P_i(\theta_i^*(s))],\qquad E(C_i)=R/(1-\rho) \tag{10}$$

证明:1)∵ $L_i(\tau_i)=\sum_{k=1}^{N_i(I_i)}\xi_k$ (11)

$$\therefore \bar{G}_i(z)=E[z^{\sum_{k=1}^{N_i(I_i)}\xi_k}]=\int_0^\infty E[z^{\sum_{k=1}^{N_i(t)}\xi_k}]\mathrm{d}p\{I_i\leqslant t\}=I_i^*[\lambda_i-\lambda_i P_i(z)]$$

对(11)两边求数学期望,可得

$$E[N_i(I_i)]=E[L_i(\tau_i)]/E(\xi)=\lambda_i R(1-\rho_i)/(1-\rho)$$

又 $$E[N_i(I_i)]=\int_0^\infty \lambda_i t\mathrm{d}p\{I_i\leqslant t\}=\lambda_i E[I_i]$$

故可得(8).

2)∵ $T_i=\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_k$

$$\therefore\ T_i^*(s)=E[e^{-s\sum_{k=1}^{L_i(\tau_i)}\theta_k}]=\bar{G}_i[\theta_i^*(s)]$$

且 $E[T_i]=E[L_i(\tau_i)]E(\theta_i)=R\rho_i/(1-\rho)$

3)∵ $C_i=I_i+T_i=I_i+\sum_{k=1}^{\sum_{k=1}^{N_i(I_i)}\xi_k}\theta_k$

$$\therefore\ C_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot E[e^{-s\sum_{k=1}^{\sum_{k=1}^{N_i(t)}\xi_k}\theta_k}]\mathrm{d}p\{I_i\leqslant t\}$$

令 $$\sum_{k=1}^{N_i(t)}\xi_k=\eta_i$$

则 $$E[e^{-s\sum_{k=1}^{\eta_i}\theta_k}]=\bar{\eta}_i[\theta_i^*(s)]$$

∵ $$\bar{\eta}_i(z)=E[z^{\eta_i}]=E[z^{\sum_{k=0}^{N_i(t)}\xi_k}]=e^{-[\lambda_i-\lambda_i P_i(z)]t}$$

∴ $$\bar{\eta}_i[\theta_i^*(s)]=e^{-[\lambda_i-\lambda_i P_i(\theta_i^*(s))]t}$$

故 $$C_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-[\lambda_i+s-\lambda_i P_i(\theta_i^*(s))]t}\mathrm{d}p\{I_i\leqslant t\}=I_i^*[\lambda_i+s-\lambda_i P_i(\theta_i^*(s))]$$

$$E(C_i)=E(I_i)+E(T_i)=R/(1-\rho)$$

**定理 3** $\bar{Q}_i(z)=(1-\rho)[\bar{G}_i(z)-1]B_i^*[\lambda_i-\lambda_i P_i(z)]/\lambda_i R\{z-B_i^*[\lambda_i-\lambda_i P_i(z)]\}$

证明:由于现在考虑的是批到达,故由引理 3 可证得结论。

**定理 4** 设 $S_{i1}$ 为到达第 $i$ 站的一批顾客中第一个顾客在 $i$ 站的逗留时间(即从他到达 $i$ 站起一直到他被服务完离开 $i$ 站时止这段时间),则 $S_{i1}$ 的 LST 为

$$S_a^*(s)=\rho_i B_i^*(s)(1-\rho)\{\prod_{j=1}^{N}R_j^*(s)\cdot G[\theta_1^*(s),\cdots,\theta_{i-1}^*(s),1,\theta_{i+1}^*(s),$$
$$\cdots,\theta_N^*(s)]-1\}/\lambda_i R(z-B_i^*(s))+B_i^*(s)(1-\rho)\cdot$$
$$\{I_i^*[\lambda_i-\lambda_i P_i(B_i^*(s))]-I_i^*(s)\}/R[s-\lambda_i+\lambda_i P_i(B_i^*(s))] \quad (12)$$

证明：1) 如果该顾客到达 $i$ 站时服务器恰在第 $i$ 站服务，则

$$Q_i=\sum_{k=1}^{N_i(S_a)}\xi_{ik}$$

$$\therefore \quad \bar{Q}_i(z)=E[z^{\sum_{k=1}^{N_i(S_a)}\xi_{ik}}]=S_a^*[\lambda_i-\lambda_i P_i(z)]$$

由定理 1 的(2) 式和定理 3，且令 $s=\lambda_i-\lambda_i P_i(z)$，即得：

$$S_a^*(s)=\frac{1-\rho}{\lambda_i R}\cdot\frac{B_i^*(s)}{z-B_i^*(s)}\cdot$$
$$\{\prod_{j=1}^{N}R_j^*(s)\times G[\theta_1^*(s),\cdots,\theta_{i-1}^*(s),1,\theta_{i+1}^*(s),\cdots,\theta_N^*(s)]-1]-1\} \quad (13)$$

2) 如果该顾客到达 $i$ 站时服务器不在第 $i$ 站，则有

$$S_a=u_i+\sum_{k=1}^{\sum_{t=1}^{N_i(\delta_i)}\xi_{it}}B_{ik}+B_i$$

由引理 2 和定理 3，可得：

$$S_a^*(s)=E[e^{-sS_a}]=B_i^*(s)\times\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx}\cdot$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[P_i(B_i^*(s))]^n p\{N_i(y)=n\}d p\{\delta_i\leqslant y,u_i\leqslant x\}=$$
$$B_i^*(s)\cdot P_i(\lambda_i-\lambda_i P_i(B_i^*(s)),s)=$$
$$B_i^*(s)(1-\rho)\{I_i^*[\lambda_i-\lambda_i P_i^*(B_i^*(s))]-$$
$$I_i^*(s)\}/R(1-\rho_i)[s-\lambda_i+\lambda_i P_i^*(B_i^*(s))] \quad (14)$$

又因为在任意时刻服务器在站 $i$ 的概率为 $E[T_i]/E[C_i]=\rho_i$.

故由(13) 和(14)，一般情形 $S_a$ 的 LST 为：

$S_a^*(s)=E[e^{-sS_a}]=\rho_i\cdot E[e^{-sS_a}$ | 该顾客到达 $i$ 站时服务器恰在 $i$ 站]

$+(1-\rho_i)\cdot E[e^{-sS_a}$ | 该顾客到达 $i$ 站时服务器不在 $i$ 站]

化简后即得(12).

## 参　考　文　献


[1] TAKAGI H. Analysis of Polling System[M]. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.

[2] LEVY H. Polling Systems: Apllication, Modeling and Optimization[J]. IEEE Trans. Commun, 1990, 38(10): 43~47.

[3] 孙荣恒，雷玉洁．关于 M/G/1 系统等待时间的一个注记．重庆大学学报，1999, 22(1): 51~56.

[4] TAKAGI H. Queueing Analysis, VolI: Vacation and Priority System, Part 1. North-Holland, AMS, 1991.

# Analysis of Exhaustive Service Polling System with Bulk Arrival

LEI Yu-jie, SUN Rong-heng
(1. Dept. of Math., The Third Military Medical University, Chongqing 400038, China; 2. College of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT**: The exhaustive service polling system with bulk arrival, and the distribution and mean of the queue length and the cycle time, service time and interval time of the server and the distributions of sojourn times are studied.

**KEYWORDS**: bulk arrival; exhaustive service; polling system; queue length; sojourn time

（责任编辑 刘尚坤）

（上接 91 页）

# Nonlinear Response and the Dynamic Stability of Viscoelastic Cable

LI Ying-hui, LI Bin, YIN Xue-gang
(1. College of Architectural Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. College of Logistic Engineering, 400041)

**ABSTRACT**: Based on one-dimensional constitutive equations of Revlon materials and the motion equations of the cable, the partial differential equations of the viscoelastic cable in inner and outer of plan under the gravity are investigated. Using Galerkin's method, a system of nonlinear ordinary equations is obtained. The analysis methods of the dynamic stability of viscoelastic cable are given. Finally, the effect of dynamic response of the cable, which is produced by elastic and viscoelastic parameters, is testified by the research of digital simulation.

**KEYWORDS**: Viscoelastic cable; Revlon material; Galerkin's method; dynamic response; dynamic stability

（责任编辑 钟学恒）