文章编号：1000－582x(2000)01-0041-04

(11)

两相多孔介质拟静态问题的一种有限元解法* 0359

41－44　　　　~~O34~~

严　波[1]，刘占芳[1**]，张湘伟[2]

（1. 重庆大学 建筑工程学院，重庆 400044；2. 汕头大学 科学院计算力学研究所，汕头 515063）

摘　要：对于流体饱和两相多孔介质的拟静态问题，在忽略流体粘性的情况下，从场方程中消去流体相速度变量，得到以固体相位移和孔隙压力为基本变量的控制场方程，并给出相应边值和初值问题的提法，进而采用加权残值有限元法导出基于 u^S-p 变量的混合有限元公式，最后讨论了系统方程的解法。

关键词：两相多孔介质；拟静态问题；混合有限元

中图分类号：O 34　　　　**文献标识码**：A

罚有限元

基于混合物理论的两相多孔介质模型，在土体固结和波动问题以及生物组织力学行为的描述等方面获得了成功[1~3]，针对该类问题的数值分析方法的研究已经取得较大的进展。作者针对 Bowen 的不可压缩多孔介质模型[4] 的拟静态问题和波动问题，讨论了相应的有限元求解方法[5,6]，包括罚有限元方法和基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元方法。罚有限元方法具有系统方程规模小的优点。为了保证计算精度，需引入一大的罚参数，过大的罚参数会使方程出现病态，罚参数的选择有时会遇到困难。基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元方法，避免了罚方法不恰当的罚参数的选择导致方程出现病态的可能，且可以得到比罚方法精度更高的压力计算结果。但该方法节点变量增加，方程求解运算量较大，且由于系统方程的系数矩阵非正定，不能用直接法和传统的迭代法求解。作者通过考查拟静态问题的控制场方程，发现在忽略流体相粘性的情况下，可以在控制场方程中消去流体相的速度项，进而可以导出一种基于 u^S-p 变量的混合有限元公式。由于这种方法消除了流体相速度变量，使节点变量减少，系统方程的规模减小，从而提高计算效率。此外，该方法还可以得到较高精度的压力计算值。

1　控制场方程和边初值问题的提法

基于混合物理论的流体饱和两相多孔介质被视为由一流体相和一可变形固体相组成的不相混溶的混合物，各相为具有独立运动规律的连续介质。各相介质的几何和物理量均在整个空间上定义。用体积分数表达某一组分在整个混合物中所占的比例，其定义为该组分的体积与总体积之比。详细的理论可参见文[7]。

假设两相介质之间无化学反应、质量变换、热交换和动量矩交换，多孔体在小变形范围内，固体相和流体相微观上不可压缩。又由于流体的粘性产生的阻力相对于两相间的摩擦阻力通常较小，忽略流体相的粘性，视其为理想流体，固体相为各向同性线弹性介质，忽略外部体积力。控制场方程如下[5]：

质量平衡方程

$$\nabla\cdot(\varphi^S\dot{\boldsymbol{u}}^S+\varphi^F\dot{\boldsymbol{u}}^F)=0 \qquad (1)$$

动量平衡方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}^S+K(\dot{\boldsymbol{u}}^F-\dot{\boldsymbol{u}}^S)=0 \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}^F-K(\dot{\boldsymbol{u}}^F-\dot{\boldsymbol{u}}^S)=0 \qquad (3)$$

本构关系

$$\boldsymbol{T}^S=-\varphi^S p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_E^S$$
$$\boldsymbol{T}_E^S=2\mu^S\boldsymbol{E}^S+\lambda^S(\boldsymbol{E}^S\cdot\boldsymbol{I})\boldsymbol{I} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{T}^F=-\varphi^F p\boldsymbol{I} \qquad (5)$$

式中上标 S 代表固体相，F 代表流体相，φ^S 和 φ^F 为体积分数，具体地，$\varphi^F=V^F/V$ 为孔隙率，$\varphi^S=V^S/V$ 为固体相含量。由饱和条件有

$$\varphi^S+\varphi^F=1 \qquad (6)$$

* 收稿日期：1999-07-12
基金项目：重庆市科委基金资助项目
作者简介：严波(1965-)，男，重庆永川人，重庆大学副教授，博士，主要从事固体力学和计算力学的研究。
** 刘占芳教授为重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

p 为孔隙压力, ρ 为密度, μ^S 和 λ^S 为固体相的弹性常数、$\boldsymbol{E}^S$ 为固体相的应变张量, K为扩散阻力系数, 其与渗透率有关。对于各向同性渗透情况,

$$K = \frac{(\varphi^F)^2}{\kappa} \tag{7}$$

其中 κ 为渗透率。

在流体相为理想流体的情况下, 由方程(3) 可得:

$$\dot{\boldsymbol{u}}^F = \dot{\boldsymbol{u}}^S + K^{-1}\nabla\cdot\boldsymbol{T}^F \tag{8}$$

将其代入式(1) 和(2) 中, 并利用关系(6), 有

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{u}}^S + \varphi^F K^{-1}\nabla\cdot\boldsymbol{T}^F) = 0 \tag{9}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{T}^S + \boldsymbol{T}^F) = 0 \tag{10}$$

利用本构关系(4)、(5) 和摩擦阻力与渗透率的关系(7), 上两式可写成

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{u}}^S - \kappa\nabla p) = 0 \tag{11}$$

$$\nabla\cdot(-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_E^S) = 0 \tag{12}$$

对此问题可提出如下边界条件

$$\boldsymbol{u}^S = \hat{\boldsymbol{u}}^S \quad \text{on } \Gamma_u^S \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{t}^S = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_E^S = \hat{\boldsymbol{t}}^S \quad \text{on } \Gamma_t^S \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{t}^F = p\boldsymbol{n} = \hat{p}\boldsymbol{n} \quad \text{on } \Gamma_t^F \tag{13c}$$

$$\kappa\frac{\partial p}{\partial n} = \kappa\nabla p\boldsymbol{n} = \overline{\kappa\nabla p\boldsymbol{n}} \quad \text{on } \Gamma_p \tag{13d}$$

其中 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_E^S$ 可理解为作用在边界上的有效应力向量, $p\boldsymbol{n}$ 为由孔隙压力产生的应力向量, $\kappa\nabla p\boldsymbol{n}$ 为流体通过物体单位表面积沿外法线方向的流量。

初值条件为

$$\boldsymbol{u}^S(0) = \boldsymbol{u}_0^S, \quad \dot{\boldsymbol{u}}^S(0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0^S \tag{14}$$

这样, 场方程(11)、(12)、边界条件(13) 和初值条件(14) 就构成了流体饱和两相多孔介质拟静态问题的边值和初值问题。

2 有限元平衡方程

用加权残值法推导有限元公式。在此选择(13a) 为强制满足的边界条件, 而(13b)、(13c) 和(13d) 为自然边界条件。$\boldsymbol{w}^S$、w、$\bar{\boldsymbol{w}}^S$、$\bar{\boldsymbol{w}}^F$、$\bar{w}$ 分别为方程(12)、(11) 和自然边界条件的权函数, 相应的加权残值表达式为

$$\int_V \boldsymbol{w}^S\cdot[\nabla\cdot(-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_E^S)]\mathrm{d}v + \int_{\Gamma_t^S}\bar{\boldsymbol{w}}^S\cdot(\hat{\boldsymbol{t}}^S - \boldsymbol{t}^S)\mathrm{d}\Gamma + \int_V w\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{u}}^S - \kappa\nabla p)\mathrm{d}v + \int_{\Gamma_t^F}\bar{\boldsymbol{w}}^F\cdot(\hat{p} - p)\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma + \int \bar{w}(\overline{\kappa\nabla p\boldsymbol{n}} - \kappa\nabla p\boldsymbol{n})\mathrm{d}v = 0 \tag{15}$$

由 Gauss 定理, 可得

$$\begin{aligned}\int_V \boldsymbol{w}^S\cdot\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_E^S - p\boldsymbol{I})\mathrm{d}v = &-\int_V(\nabla\boldsymbol{w}^S):(\boldsymbol{T}_E^S - p\boldsymbol{I})\mathrm{d}v + \oint_\Gamma \boldsymbol{w}^S\cdot(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_E^S)\mathrm{d}\Gamma - \\ &\oint_\Gamma \boldsymbol{w}^S\cdot p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma = -\int_V(\nabla\boldsymbol{w}^S):(-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_E^S)\mathrm{d}v + \\ &\oint_\Gamma \boldsymbol{w}^S\cdot\boldsymbol{t}^S\mathrm{d}\Gamma - \oint_\Gamma \boldsymbol{w}^S\cdot p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{16}$$

$$\int_V w\nabla\cdot(-\kappa\nabla p\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{u}}^S)\mathrm{d}v = \int_V w(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^S)\mathrm{d}v + \int_V(\nabla w)(\kappa\nabla p)\mathrm{d}v - \oint_\Gamma w\kappa\nabla p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma$$

由于固体相的位移边界条件为强制满足的边界条件, 故可以在 Γ_u^S 上使权函数 $\boldsymbol{w}^S = 0$, 并令

$$\bar{\boldsymbol{w}}^S = \boldsymbol{w}^S, \ \bar{\boldsymbol{w}}^F = -\boldsymbol{w}^S, \ \bar{w} = -w \tag{17}$$

将(16) 代入(15) 式, 并考虑上述条件, 得

$$\begin{aligned}&-\int_V[(\nabla\boldsymbol{w}^S):(-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_E^S)]\mathrm{d}v + \int_v w(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^S)\mathrm{d}v + \int_V(\nabla w)(\kappa\nabla p)\mathrm{d}v = \\ &-\int_{\Gamma_t^S}\boldsymbol{w}^S\cdot\hat{\boldsymbol{t}}^S\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_t^F}\boldsymbol{w}^S\cdot\hat{p}\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_p} w\kappa\overline{\nabla p\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{18}$$

可用矩阵形式重写方程(18). 注意以下各量为前述相应张量的矩阵形式。现对固体的位移、速度和压力插值

$$u^S = Nu_n^S \quad \dot{u}^S = N\dot{u}_n^S \quad p = N_p p_n \tag{19}$$

由于方程中出现了压力的二阶导数, 因此要求压力和固体相位移的插值函数 C_0 连续。采用 Galerkin 法, 取

$$w^S = Nw_n^S \qquad w = N_p w_n \tag{20}$$

将(19) 和(20) 式代入(18) 式的矩阵形式中, 并借助于如下关系式

$$\begin{aligned}&(\nabla w^S):(pI) = (w_n^S)^T(LB)^T N_p p_n \\ &(\nabla w^S): T_E^S = (w_n^S)^T B^T D^S B u_n^S \\ &w(\nabla\cdot\dot{u}^S) = (w_n)^T N_p^T L B\dot{u}_n^S \\ &(\nabla w)(\kappa\nabla p) = (w_n)^T B_p^T \kappa B_p p_n\end{aligned} \tag{21}$$

可得:

$$\begin{aligned}&-(w_n^S)^T(H_n u_n^S + A_n p_n) + (w_n)^T(A_n^T\dot{u}_n^S + E_n p_n) = \\ &-(w_n^S)^T f_n^S + (w_n)^T f_n^F\end{aligned} \tag{22}$$

由权函数的任意性, 可得单元平衡方程

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_n^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_n^S\\ \dot{p}_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}H_n & A_n\\ 0 & E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n^S\\ p_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n^S\\ f_n^F\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中

$$A_n = \int_{V_n} (LB)^T N_p \mathrm{d}v$$

$$H_n = \int_{V_n} (\lambda^s B^T D_1 B + \mu^s B^T D_2 B) \mathrm{d}v = \int_{V_n} B^T D^s B \mathrm{d}v$$

$$E_n = \int_{V_n} B_p^T \kappa B_p \mathrm{d}v \tag{24}$$

$$f_n^s = \int_{\Gamma_S} N^T \bar{t}^s \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_F} N^T \bar{p} n \mathrm{d}\Gamma$$

$$f_n^F = \int_{\Gamma_P} N^T \overline{\kappa \nabla p n} \mathrm{d}\Gamma$$

对于三维问题，$L = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$，

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

N 和 B 分别为形状函数和应变矩阵。注意，这里

$$N_p = [N_1^p \quad \cdots \quad N_n^p] \tag{25}$$

式中下标 n 表示单元的节点数。

对于平面应力或平面应变问题，B_p 为：

$$B_p = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^p}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^p}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^p}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{26}$$

方程(23) 对单元进行组集即得到基于 u^S-p 变量的混合有限元系统方程

$$C\dot{u} + Ku = f \tag{27}$$

这里

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} H & A \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f^s \\ f^F \end{bmatrix} \tag{28}$$

其中 A、H、E 和 f^s、f^F 分别为相应单元矩阵的组集。

流体相的速度可在单元中按式(8) 计算得到。

3　系统方程的求解

系统方程(27) 可采用有限差分法求解。设在 $t_{m+1} = t_m + \Delta t$ 时刻，有

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + \Delta t \dot{u}_{m+\omega} \\ \dot{u}_{m+\omega} &= (1-\omega)\dot{u}_m + \omega \dot{u}_{m+1} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 1 \end{aligned} \tag{29}$$

利用上两式，由方程(27) 可得

$$\begin{aligned} &[C + \Delta t \omega K]\dot{u}_{m+1} = \\ &f_{m+1} - K[u_m + \Delta t(1-\omega)\dot{u}_m] \end{aligned} \tag{30}$$

在给定初始条件下，即可由(29) 和(30) 求得各时刻的位移和速度。当 $\omega \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时即为隐式积分，此时是无条件稳定的。

此外，由式(28) 可知，方程(30) 的系数矩阵对称正定，可用直接法求解。

4　结论

在忽略流体相粘性的情况下，导出流体饱和两相多孔介质拟静态问题的基于 u^S-p 变量的混合有限元方程。该方法节点变量较少，系统方程规模较小，得到的压力值在单元之间是连续的，具有较高的精度。该方法同时具备了罚有限元方法和基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元方法的优点，并回避了两种方法的缺点。

参 考 文 献

[1] PREVOST J H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: an efficient finite element procedure[J]. Soil Dynamics and Earth Engng, 1985, 4: 183～202.

[2] MOW V C, KUEI S C, LAI W M, et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments[J]. J. Biomech. Eng, 1980, 102: 73～84.

[3] LEVENSTON M E, FRANK E H, GRODZINSKY A J. Variationally derived 3-field finite element formulations for quasistatic poroelastic analysis of hydrated biological tissues[J]. Comp. Methods Appl. Mech. Engng, 1998, 156: 231～246.

[4] BOWEN R M. Incompressible porous media by use of the theory of mixtures[J]. Int. J. Engng. Sci, 1980, 18: 19～45.

[5] 严波. 关节软骨两相多孔介质模型的有限元方法[D];

[博士学位论文]. 重庆:重庆大学建筑工程学院, 1999.
[6] 严波, 刘占芳, 张湘伟. 流体饱和多孔介质中波传播问题的有限元分析[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(12): 1 235~1 244.
[7] R de Boer 著. 多孔介质理论发展史上的重要成果[M]: 刘占芳, 严波 译. 重庆:重庆大学出版社, 1995.

A Finite Element Method for Quasi-Static Problems of Two-phase Porous Media

YAN Bo[1], LIU Zhan-fang[1], ZHANG Xiang-wei[2]
(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Shantou University, Shantou 515063, China)

ABSTRACT: For the quasi-static problems of two-phase porous media, the velocity variable of fluid phase can be eliminated as the viscosity of fluid is neglected. The corresponding governing equations, with displacement of solid phase and pore pressure as basic variables, as well as the boundary and initial conditions are given out. Finally a mixed finite element formula with $u^S - p$ variables is obtained with weighted residual method. This method has lesser nodal variables and higher accuracy of pressure distribution.

KEYWORDS: two-phase porous media; quasi-static problem; mixed finite element

（责任编辑 钟学恒）

（上接 31 页）

Auto Mesh Algorithm of the Finite Cover System in the Numerical Manifold Method

ZHANG Xiang-wei[1], CAI Yong-chang[2], LIAO Lin-can[2]
(1. Institute of Mechanics, Science Center, Shantou Univeristy, Shantou 515063, China; 2. Center of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

ABSTRACT: A auto mesh algorithm of the finite cover system is presented by abstracting the finite cover system of numerical manifold method as independent data classes. The programs are made by Object-Oriented Programming(OOP). The accuracy manifold element can be generated automatically when the continuous material is cut by crack. The calculation result shows that the algorithm is reliable and effective.

KEYWORDS: manifold method; continuous material; cover; crack

（责任编辑 钟学恒）