文章编号:1000-582x(2000)04-0072-05

72-75,79

两相多孔介质动力问题的混合有限元及其解法*

严 波[1], 刘占芳[1**], 张湘伟[2]
(1 重庆大学 建筑工程学院,重庆 400044; 2 汕头大学 科学院 计算力学研究所,汕头 515063)

摘 要: 针对基于混合物理论的流体饱和两相多孔质模型,采用 Galerkin 加权残值有限元方法导出基于 u^S-u^F-p 3 个变量的混合有限元动力平衡方程。这种方法克服了罚有限元方法选择恰当的罚参数的困难,且计算得到的压力分布的精度高于罚有限元方法。由于系统方程的系数矩阵非正定,系统方程不能用直接法和传统的迭代法求解,为此提出了一种求解该方程组的迭代解法。由分片试验得出节点压力插值函数的阶须高于固体相节点位移插值函数的阶的重要结论。

关键词: 两相多孔介质; 动力问题; 混合有限元 流体力学
中图分类号: O 347 O359 文献标识码:A

多孔介质动力瞬态响应问题的研究在瞬时固结、石油勘探、噪声控制、地震工程以及生物医学工程中有着十分重要的地位。尽管 Biot 多孔介质模型在多孔材料中波的传播和动力响应问题方面取得了很多成果,可是该模型本身缺乏坚实的理论基础,具有一定的局限性。基于混合物理论的多孔介质模型,建立在连续介质力学理论框架上,越来越受到重视[1],在土体的固结和波动问题[2,3]以及生物软组织模型[4,5]的描述等方面获得了成功。1985 年,Prevost[2]针对其提出的基于混合物理论的用率型本构方程描述的两相多孔介质模型,用罚方法研究了土体中波传播问题的有限元解法。1996 年,Diebels[3]针对 Ehlers 给出的另一种形式的基于混合物理论的多孔介质模型,导出了以固体位移、固体速度、流体速度和压力为基本变量的混合型有限元公式。Prevost 采用的是率型本构关系,而 Diebels 使用的模型较复杂,导出的有限元方程具有 4 个基本变量,实际应用时方程的规模会很大。1998 年,Levenston[4]针对生物组织两相多孔介质模型的拟静态问题,采用 Lagrange 乘子法导出了以固体位移、流体与固体的相对位移和压力为基本变量的混合有限元方法,但是该文没有对所导出的具有非正定系数矩阵的有限元方程的求解方法进行讨论。

作者针对 Bowen 的不可压缩两相多孔介质模型[6],用罚有限元方法讨论了流体饱和多孔介质中波的传播问题[7]。罚有限元法中罚参数的选择有时会遇到困难,不恰当的罚参数的选择可能引起方程出现病态。为此作者针对同一模型给出基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元动力平衡方程,并对该具有非正定系数矩阵的方程组提出了一种迭代求解方法。混合有限元法避免了罚参数的选择,且可以得到比罚有限元方法精度更高的压力分布。

1 控制场方程

假设多孔介质的两相之间无化学反应、质量变换、热交换和动量矩交换,多孔体在小变形范围内,固体和流体相微观上不可压缩,忽略流体相的粘性,视其为理想流体,固体相为各向同性线弹性介质,忽略外部体积力。在这些假设条件下,基于混合物理论的流体饱和两相多孔介质的控制场方程如下[7,8]:

质量平衡方程

$$\nabla\cdot(\varphi^S\dot{\boldsymbol{u}}^S+\varphi^F\dot{\boldsymbol{u}}^F)=0 \tag{1}$$

动量平衡方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}^S+K(\dot{\boldsymbol{u}}^F-\dot{\boldsymbol{u}}^S)=\rho^S\ddot{\boldsymbol{u}}^S \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}^F-K(\dot{\boldsymbol{u}}^F-\dot{\boldsymbol{u}}^S)=\rho^F\ddot{\boldsymbol{u}}^F \tag{3}$$

* 收稿日期:1999-10-07
基金项目:重庆市科委基金资助项目(1999)
作者简介:严波(1965-),男,重庆永川人,重庆大学副教授。主要从事固体力学和计算力学的研究。
** 刘占芳教授为重庆大学机械传动国家重点实验室研究人员。

本构关系

$$T^S = -\varphi^S p\boldsymbol{I} + 2\mu^S E^S + \lambda^S(E^S \cdot \boldsymbol{I})\boldsymbol{I}$$
$$T^F = -\varphi^F p\boldsymbol{I} \tag{4}$$

边界条件

$$u^S = \hat{u}^S \quad \text{on} \quad \Gamma_u^S \tag{5a}$$
$$\dot{u}^F = \dot{\hat{u}}^F \quad \text{on} \quad \Gamma_u^F \tag{5b}$$
$$t^S = \hat{t}^S \quad \text{on} \quad \Gamma_t^S \tag{5c}$$
$$t^F = \varphi^F p n = \varphi^F \hat{p} n \quad \text{on} \quad \Gamma_t^F \tag{5d}$$

初值条件

$$\begin{aligned} u^S(0) &= u_0^S & u^F(0) &= u_0^F \\ \dot{u}^S(0) &= \dot{u}_0^S & \dot{u}^F(0) &= \dot{u}_0^F \\ \ddot{u}^S(0) &= \ddot{u}_0^S & \ddot{u}^F(0) &= \ddot{u}_0^F \end{aligned} \tag{6}$$

式中上标 S 代表固体相，F 代表流体相，φ^S 和 φ^F 为体积分数，具体地，$\varphi^F = V^F/V$ 为孔隙率，$\varphi^S = V^S/V$ 为固体相含量，由饱和条件有

$$\varphi^S + \varphi^F = 1 \tag{7}$$

p 为孔隙压力，μ^S 和 λ^S 为固体相的弹性常数，E^S 为固体相的应变张量，K 为扩散阻力系数，其与渗透率有关。对于各向同性渗透情况

$$K = \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{\kappa^F}$$

其中 κ^F 为达西(Darcy)渗透系数，而 γ^{FR} 为流体相的真实比重。ρ 为密度。

场方程(1)～(4)、边界条件(5)和初值条件(6)即构成了流体饱和两相多孔介质动力问题的边值和初值问题。

2　有限元平衡方程

以固体相位移、流体相位移(速度)和压力为基本变量，用 Galerkin 加权残值法推导有限元动力平衡方程。选择 5(a) 和(5b) 为强制满足的边界条件，(5c) 和(5d) 为自然边界条件。假设 w^S、$\bar{w}^S$，w^F、$\bar{w}^F$，w^c 分别为固体相和流体相动量平衡方程、自然边界条件及质量平衡方程的权函数，相应的加权残值表达式为：

$$\begin{aligned} &\int_v w^S \cdot [\nabla \cdot T^S + K(\dot{u}^F - \dot{u}^S) - \rho^S \ddot{u}^S] dv + \\ &\int_{\Gamma_t^S} \bar{w}^S \cdot (\hat{t}^S - t^S) d\Gamma + \\ &\int_v W^F \cdot [\nabla \cdot T^F - K(\dot{u}^F - \dot{u}^S) - \rho^F \ddot{u}^F] dv + \\ &\int_{\Gamma_t^F} \bar{W}^F \cdot \varphi^F (\hat{p} - p) n d\Gamma + \\ &\int_v w^c [\nabla \cdot (\varphi^S \dot{u}^S + \varphi^F \dot{u}^F)] dv = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

利用 Gauss 定理，可得方程(8)的弱形式

$$\begin{aligned} &\int_v (\nabla w^S) : [\lambda^S e^S \boldsymbol{I} + 2\mu^S E^S - \varphi^S p \boldsymbol{I}] dv - \\ &\int_v w^S \cdot K(\dot{u}^F - \dot{u}^S) dv + \int_v w^S \cdot \rho^S \ddot{u} dv + \\ &\int_v (\nabla w^F) : (-\varphi^F p \boldsymbol{I}) dv + \\ &\int_v w^F \cdot \rho^F dv + \int_v w^F \cdot K(\dot{u}^F - \dot{u}^S) dv + \\ &\int_v w^c [\nabla \cdot (\varphi^S \dot{u}^S + \varphi^F \dot{u}^F)] dv = \\ &\int_{\Gamma_t^S} w^S \hat{t}^S d\Gamma + \int_{\Gamma_t^F} w^F \cdot \varphi^F \hat{p} n d\Gamma \end{aligned} \tag{9}$$

此即有限元的基本方程。对固体相及流体相的位移、速度和压力插值

$$\begin{aligned} u^S &= N u_n^S & \dot{u}^S &= N \dot{u}_n^S \\ u^F &= N u_n^F & \dot{u}^F &= N \dot{u}_n^F \\ p &= N_p p_n \end{aligned} \tag{10}$$

在此，固体相和流体相位移(速度)取相同的插值函数，要求其 C_0 连续，而压力的插值函数可以在单元间不连续。后面将讨论选择位移和压力插值函数时应满足的条件。采用 Galerkin 有限元法，取

$$w^S = N w_n^S \quad w^F = N w_n^F \quad w^c = N_c w_n^c \tag{11}$$

w_n^S、w_n^F 和 w_n^c 为单元 n 的任意系数。注意，N_c 在单元间可以不连续，在此取 $N_p = N_c$。略去推导过程，最后可得单元平衡方程

$$\begin{bmatrix} M_n^S & 0 & 0 \\ 0 & M_n^F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_n^S \\ \ddot{u}_n^F \\ \ddot{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_n & -A_n & 0 \\ -A_n^T & A_n & 0 \\ -\varphi^S C_n^T & -\varphi^F C_n^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_n^S \\ \dot{u}_n^F \\ \dot{p}_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} K_n & 0 & -\varphi^S C_n \\ 0 & 0 & -\varphi^F C_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^S \\ u_n^F \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n^S \\ f_n^F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中

$$M_n^S = \int_{v_n} \rho^S N^T N \mathrm{d}v \quad M_n^F = \int_{v_n} \rho^F N^T N \mathrm{d}v$$
$$A_n = \int_{v_n} K N^T N \mathrm{d}v \quad C_n = \int_{v_n} (LB)^T N_p \mathrm{d}v$$
$$K_n = \int_{v_n} (\lambda^S B^T D_1 B + \mu^S B^T D_2 B) \mathrm{d}v = \int_{v_n} B^T D^S B \mathrm{d}v$$
$$f_n^S = \int_{\Gamma_s} N^T \hat{t}^S \mathrm{d}\Gamma \quad f_n^F = \int_{\Gamma_F} N^T \varphi^F \hat{p} n \mathrm{d}\Gamma \tag{13}$$

对于 3 维问题

$$L = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$
$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程(12) 对所有单元求和,得系统方程

$$\begin{bmatrix} M^S & 0 & 0 \\ 0 & M^F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}^S \\ \ddot{u}^F \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & -A & 0 \\ -A^T & A & 0 \\ -\varphi^S C^T & -\varphi^F C^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}^S \\ \dot{u}^F \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 & -\varphi^S C \\ 0 & 0 & -\varphi^F C \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^S \\ u^F \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^S \\ f^F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

此方程即为求解流体饱和两相多孔介质动力问题的基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元公式。

3 系统方程的迭代解法

显然,系统平衡方程(14) 的系数矩阵非正定,不能用直接法和传统的迭代法求解。为此,首先将其改写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} M^S & 0 \\ 0 & M^F \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} A & -A \\ -A^T & A \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u^S \\ u^F \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} -\varphi^S C \\ -\varphi^F C \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f^S \\ f^F \end{bmatrix} \tag{16}$$

再将(15) 写成如下两方程

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + B\dot{u} + Hu + Dp &= f \\ D^T \dot{u} &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

若时间积分采用 Newmark 法,在 $t_{m+1} = t_m + \Delta t$ 时刻有

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{m+1} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}(u_{m+1} - u_m) - \frac{1}{\alpha \Delta t}\dot{u}_m - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{u}_m \\ \dot{u}_{m+1} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t}(u_{m+1} - u_m) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{u}_m + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\Delta t \ddot{u}_m \end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{m+1} + B\dot{u}_{m+1} + Hu_{m+1} + Dp_{m+1} &= f_{m+1} \\ D^T \dot{u}_{m+1} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

令

$$\begin{aligned} & a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \\ & a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ & a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t \\ & a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad a_7 = \delta \Delta t \end{aligned} \tag{20}$$

将(18) 代入式(19),并使用(20) 中的记号,化简后可得

$$\begin{aligned} \tilde{K} u_{m+1} + D P_{m+1} &= \tilde{f}_{m+1} \\ D^T u_{m+1} &= D^T b_{m+1} \end{aligned} \tag{21}$$

式中

$$\tilde{K} = a_0 M + a_1 B + H$$

$$\tilde{f}_{m+1} = f_{m+1} + M(a_0 u_m + a_2 \dot{u}_m + a_3 \ddot{u}_m) + B(a_1 u_m + a_4 \dot{u}_m + a_5 \ddot{u}_m)$$

$$b_{m+1} = u_m + \frac{1}{a_1}(a_4 \dot{u}_m + a_5 \ddot{u}_m) \tag{22}$$

可以看出，$\widetilde{K}$ 对称正定，因此可以从(21)式的第一个方程解出 u_{m+1}，并将其代入(21)式第二个方程即得

$$D^T \widetilde{K}^{-1} D p_{m+1} = D^T \widetilde{K}^{-1} \tilde{f}_{m+1} - D^T b_{m+1} \tag{23}$$

考查此方程可知，为使方程(19)唯一可解，其充要条件是 $D^T\widetilde{K}^{-1}D$ 对称正定。显然，这蕴含

$$n_u \geqslant n_p \tag{24}$$

即平衡方程中位移的总自由度不小于压力的总自由度是 $D^TK^{-1}D$ 对称正定的一个必要条件。由分片试验可知，这要求压力插值的阶必须小于固体位移插值函数的阶。具体地，固体相和流体相位移插值函数取二次，压力插值函数取一次即可满足要求。

参考文献[8]，构造如下迭代格式

$$\begin{aligned} p_{m+1}^{i+1} &= p_{m+1}^i - \rho_i r^i = \\ & p_{m+1}^i - \rho_i(D^T u_{m+1}^i - D^T b_{m+1}) = \\ & p_{m+1}^i - \rho_i D^T(u_{m+1}^i - b_{m+1}) \end{aligned} \tag{25}$$

可取 $p_{m+1}^0 = p_m$，$u_{m+1}^0 = u_m$。再由式(21)的第一式可得

$$u_{m+1}^{i+1} = \widetilde{K}^{-1}(\tilde{f}_{m+1} - D p_{m+1}^{i+1}) \tag{26}$$

式(25)、(26)和(28)即构成方程(19)的迭代解法。为了加速收敛，式(25)中 ρ_i 的选取可采用最速下降法、最小残值法和共轭梯度法等[8]。

系统方程具体求解步骤如下：

A）初始计算

1）形成矩阵 M、B、H、D

2）给定初始值 u_0，$\dot{u}_0$，$\ddot{u}_0$，p_0

3）选择时间步长 Δt 和积分常数 α，δ，计算 $a_0 \cdots a_7$

4）形成等效刚度矩阵 $\widetilde{K} = a_0 M + a_1 B + H$

5）对 $\widetilde{K}$ 作三角分解 $\widetilde{K} = LU$

B）对每一时间步 $m = 0,1,2,\cdots$，循环计算

$u_{m+1}^0 = u_m$，$p_{m+1}^0 = p_m$

$$\tilde{f}_{m+1} = f_{m+1} + M(a_0 u_m + a_2 \dot{u}_m + a_3 \ddot{u}_m) + B(a_1 u_m + a_4 \dot{u}_m + a_5 \ddot{u}_m)$$

$$b_{m+1} = u_m + \frac{1}{a_1}(a_4 \dot{u}_m + a_5 \ddot{u}_m)$$

对 $i = 0,1,2,\cdots$ 循环，计算

$$r^i = D^T(u_{m+1}^i - b_{m+1})$$

如果 $\| r^i \| > \varepsilon$（误差容限），那么

$$p_{m+1}^{i+1} = p_{m+1}^i - \rho_i r^i$$

由 $LUu_{m+1}^{i+1} = \tilde{f}_{m+1} - Dp_{m+1}^{i+1}$，计算 u_{m+1}^{i+1}

$i = i + 1$ 进入下一个循环。

否则

$u_{m+1} = u_{m+1}^i$　$p_{m+1} = p_{m+1}^i$　$m = m + 1$

进入下一个时间步循环，直到完成所有时间步的计算。

4　结论

针对不可压缩流体饱和两相多孔介质模型，导出了基于 u^S-u^F-p 变量的混合有限元动力平衡方程，并提出了一种该方程组的迭代求解方法。由分片试验得知，采用混合有限元法节点压力插值函数的阶须低于固体相节点位移插值函数的阶。该方法可得到比罚有限元方法精度更高的压力分布。

参考文献：

[1] R DE BOER. 多孔介质理论发展史上的重要成果[M]. 刘占芳，严波 译. 重庆：重庆大学出版社，1995.

[2] PREVOST J H. Wave propagation in fluid - saturated porous media: an efficient finite element procedure[J]. Soil Dynamics and Earth Engng, 1985, 4: 183-202.

[3] DIEBEL S, EHLERS W. Dynamic analysis of a fully saturated porous medium accounting for geometrical and materials non - linearities[J]. Int J Num Meth Engng, 1996, 39: 81-97.

[4] LEVENSTON M E, FRANK E H, CRODZINSK Y A J. Variationally derived 3 - field finite element formulations for quasistatic poroelastic analysis of hydrated biological tissues[J]. Comp Methods Appl Mech Engng, 1998, 156: 231-246.

[5] 严波. 关节软骨两相多孔介质模型的有限元方法[D]. 重庆：重庆大学建筑工程学院，1999.

[6] BOWEN R M. Incompressible porous media by use of the theory of mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1980, 18: 19-45.

[7] 严波，刘占芳，张湘伟. 流体饱和多孔介质中波传播问题的有限元分析[J]. 应用数学和力学，1999，20(12)：1 235-1 244.

[8] ZIENKIEWICZ O C, VILOTTE J P, TOYOSHIMA S, et al. Iterative method for constrained and mixed approximation in inexpensive improvement of F. E. M. performance[J]. Comp Meth in Appl Mech And Eng, 1985, 51: 3-29.

（下转 79 页）

杂志,1998,(3):25-29
[10] 赵力,熊良俭.经皮药物电渗透法的实验研究[J].中华手外科杂志,1998,14(3):13-17
[11] 胡大为,王群.脉冲强磁场对小鼠 Louis 肺癌杀伤作用的形态学研究[J].中华物理医学杂志,1998,(3):19-23.

Elementary Exploration of the Mechanism and Applicable Prospects of Membrane Electroporation

XIONG Lan[1], SUN Cai-xin[1], LIAO Rui-jin[1], HU Li-na[2], LI Da-qiang[2]
(1. College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Second Affiliated Hospital of Chongqing Medical University, Chongqing 400010, China)

Abstract: Recently, more and more scholars join in the mechanism research and wide applications of membrane electroporation phenomenon. This paper introduces the electroporation precondition which leads to the numbers of pores in the membrane increased rapidly. It elaborates the mechanism research of membrane electroporation from three areas: namely the change of electric and mechanical characteristic of membrane, change of membrane molecular structure and the influence to ability of transmembrane transport of particles and ions. Moreover, this paper introduces the current wide applications of membrane electroporation characteristic in biologic technology and clinical medicine, emphasizes the significance of the mechanism research of membrane electroporation and lays out its favorable applicable prospects.

Key words: membrane; electroporation; pore; transmembrane potential

(责任编辑 李胜春)

※ ※

(上接 75 页)

Mixed Finite Element Method for Dynamic Problems of Fluid-Saturated Biphasic Porous Media

YAN Bo[1], LIU Zhang-fan[1], ZHANG Xiang-wei[2]
(1. College of Architectural Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. College of Science, Shantou University, Shantou 515063, China)

Abstract: Based on the fluid-saturated biphasic porous media model deduced from mixture theory, a finite element formulation with u^S-u^F-p variables for dynamic response analysis is given out. This method overcomes the difficulty of choosing suitable penalty parameter in penalty finite element method, and the accuracy of pressure distribution obtained with the mixed finite element method is higher than the penalty finile element method. An iterative solution method is suggested to solve the system of equations whose coefficient matrices are non-positive definite. It is concluded from patch test that the order of interpolation function for pressure variables must be higher than that of displacement variables of solid phase.

Key words: biphasic porous media; dynamic response; mixed finite element

(责任编辑 钟学恒)