

文章编号:1000-582x(2000)06-0004-03

零相位数字滤波器

纪跃波, 秦树人, 汤宝平
(重庆大学机械学院测试中心, 重庆 400044)

摘要: 针对通常情况下滤波器引起的相移问题, 概述零相位滤波的重要意义, 提出了将输入信号序列反转后通过滤波器, 然后将所得结果逆转后再次通过滤波器的 FRR 滤波方法。还提出通过时间反转法直接构造零相位数字滤波器方法。通过仿真实验对零相位数字滤波方法给予验证, 指出零相位数字滤波器的设计方法, 使数字信号处理中滤波器引起的相位失真问题得到很好的解决。

关键词: 零相位; 数字滤波; 相位; 滤波; 虚拟仪器
中图分类号: TH 115
文献标识码: A

一个 LTI 系统对输入信号的作用就是改变信号中每一频率分量的复振幅。利用模——相表示来看这个作用就能详细地明了这个作用的性质。以离散时间情况为例:

$$Y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot X(e^{j\omega})$$

$$\text{Arg}[Y(e^{j\omega})] = \text{Arg}[H(e^{j\omega})] - \text{Arg}[X(e^{j\omega})]$$

一个 LTI 系统对输入傅里叶变换模特性上的作用就是将其乘以系统频率响应的模, 为此, $|H(e^{j\omega})|$ 称为系统的增益。同时, LTI 系统将输入的相位 $\text{Arg}[X(e^{j\omega})]$ 变化成在它基础上附加了一个相位 $\text{Arg}[H(e^{j\omega})]$, 因此, $\text{Arg}[H(e^{j\omega})]$ 称为系统的相移。系统的相移可以改变输入信号中各分量之间的相对相位关系, 这样即使系统的增益对所有频率都为常数的情况下, 也有可能对输入的时域特性上产生很大的变化。如果, 系统对输入的改变是以一种有意义的方式进行的, 那么这种模和相位上的变化可能都是所希望的; 否则, 就是不希望的, 这时就称为幅度和相位失真。

关于相移问题有一个概念就是群时延。在每个频率上的群时延就等于在那个频率上相位特性斜率的负值, 它表示相应频率信号的时域延时。定义为

$$\tau(\omega) = -d|\text{Arg}[H(e^{j\omega})]|/d\omega$$

$\tau(\omega)$ 有几种情况:

1) $\tau(\omega)$ 为 ω 的函数。这时不同频率信号之间由

于有相对延时, 导致信号时域特性发生了变化。这个现象称之为弥散。

2) $\tau(\omega)$ 为非零常数。这时不同频率信号之间相对延时量为零, 而输出信号相对输入信号在时域上有一个时间延迟。

3) $\tau(\omega)$ 恒为零。这时通过系统的任何频率信号都不会产生任何延时, 输入信号与输出信号之间在时域特性的差别取决于系统幅值特性。

很多情况下, 比如图像处理, 弥散现象都是不希望。如果系统具有零相位特性, 就可以得到精确零相位失真信号。在信号处理中, 获得线性相位滤波器通常会让我们感到满足, 然而, 通过本文的论述, 我们将发现原本可以更加容易地获得理想的零相位数字滤波器。

1 零相位数字滤波的方法及原理

实现零相位数字滤波的方法可以采用 FRR 或 RRF 方法。

FRR 滤波方法是: 先将输入序列按顺序滤波 (forward filter), 然后将所得结果逆转后反向通过滤波器 (reverse filter), 再将所得结果逆转后输出 (reverse output), 即得精确零相位失真的输出序列, 为方便起见将这种滤波方法取名为 FRR 滤波。FRR 滤波的原理可作如下推证。

收稿日期: 2000-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目: 598750901

作者简介: 纪跃波 (1969-), 男, 福建同安人, 现为集美大学讲师, 重庆大学机械学院 99 级博士生, 主要从事机械量测试技术、虚拟测试技术和理论的研究。

FRR 滤波的时域描述可由(1)~(4)式表示,

$$y_1(n) = x(n) * h(n) \quad (1)$$

$$y_2(n) = y_1(N - 1 - n) \quad (2)$$

$$y_3(n) = y_2(n) * h(n) \quad (3)$$

$$y_4(n) = y_3(N - 1 - n) \quad (4)$$

(1)~(4)式当中, $x(n)$ 表示输入序列, $h(n)$ 为所用数字滤波器冲激响应序列, $y(n)$ 为第二次滤波结果的逆转序列, 也即 FRR 滤波输出序列。

FRR 滤波的频域描述也即(1)~(4)式的相应频域表示, 分别为(5)~(8)式。

$$Y_1(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (5)$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)} Y_1(e^{-j\omega}) \quad (6)$$

$$Y_3(e^{j\omega}) = Y_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (7)$$

$$Y_4(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)} Y_3(e^{-j\omega}) \quad (8)$$

由(5)~(8)式即可得

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 \quad (9)$$

从(9)式可见, 输出 $Y(e^{j\omega})$ 与输入 $X(e^{j\omega})$ 之间不存在附加相位。FRR 确实实现了精确零相位失真滤波。

笔者在研究 FRR 滤波时, 受其启发发现了另一略有不同的算法也能实现零相位数字滤波。方法是: 先将输入信号序列反转后通过滤波器(reverse filter), 然后将所得结果逆转后再次通过滤波器(reverse filter), 这样所得结果(forward output)即为精确零相位失真的输出序列。为方便起见将这种滤波方法取名为 RRF 滤波。RRF 滤波的原理可作如下推证。RRF 滤波的时域描述可由(10)~(13)式表示。

$$x_1(n) = x(N - 1 - n) \quad (10)$$

$$y_1(n) = x_1(n) * h(n) \quad (11)$$

$$y_2(n) = y_1(N - 1 - n) \quad (12)$$

$$y(n) = y_2(n) * h(n) \quad (13)$$

由(13)式所得即为 RRF 零相位数字滤波输出序列。下面从频域特性上证明 RRF 滤波输出与输入序列之间具有零相移关系。

RRF 滤波的频域描述也即(10)~(13)式的相应频域表示, 分别为(14)~(17)式。

$$X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)} X(e^{-j\omega}) \quad (14)$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15)$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)} Y_1(e^{-j\omega}) \quad (16)$$

$$Y(e^{j\omega}) = Y_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (17)$$

由(14)~(17)式即可得

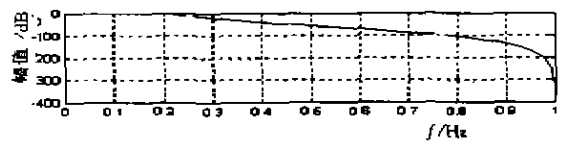
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2$$

可见 RRF 滤波与 FRR 滤波结果完全一样。很自然会让人想知道 RFR 方法是否也有同样的结论, 笔者通过推导得到否定的答案。

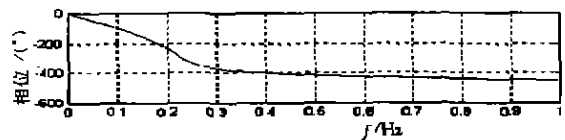
2 仿真实验

为了验证前面的论述, 笔者作了如下对比实验。采用 5 阶契比雪夫(1)低通滤波器, 数字截止频率为 0.2π , 0.1 dB 等波纹, 滤波器的频率特性曲线如图 1 所示。采样频率为 10 000 Hz。输入信号(Signal)为两叠加的正弦信号序列:

$$x(n) = 3\sin(2\pi * 133 * n/10\ 000) + \cos(2\pi * 2\ 333 * n/10\ 000)$$



(a) 归一化角频率(π)



(b) 归一化角频率(π)

图 1 滤波器的频率特性曲线

采用上面滤波器进行常规滤波, 其结果描绘成图 2 曲线 filt, 而 FRR 滤波结果描成曲线 frr, RRF 滤波结果描成曲线 rrf, 采用 Matlab 软件中的 m 文件 filtfilt.m 滤波结果描成曲线 filtfilt, 原始信号描绘成曲线信号, 所有曲线都画在同一坐标系中, 以便于比较, 如图 2 所示。

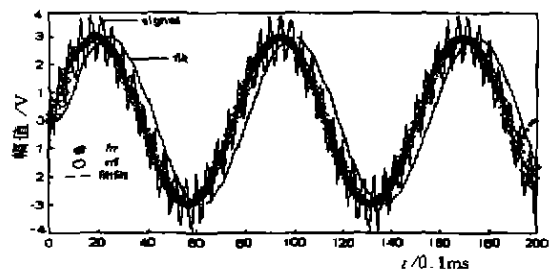


图 2 常规数字滤波与零相位数字滤波结果

由图 2 可见, 滤波结果只有 filt 曲线发生了时移。而 frr, rrf, filtfilt 均保持了输入信号原有分量的相位, 表明 FRR, RRF 确实对输入信号实现了零相位数字滤波, 只在信号截断处存在边界效应问题。边界效应是数字滤波都会面临的问题, 本文不予以讨论。

当含有处于通带内的多分量信号通过上述各零相

位数字滤波器时,其滤波效果如图3所示,输出信号与输入信号完全重合,没有相位失真。输入信号序列为

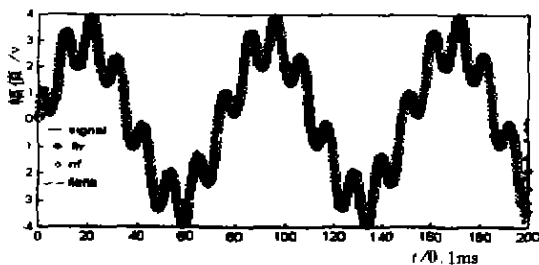


图3 多分量信号通过零相位数字带通滤波器结果

$$x(n) = 3\sin(2\pi \times 133 \times n / 10\,000) + \cos(2\pi \times 2\,933 \times n / 10\,000)$$

图4所示是作者设计的用于对零相位数字滤波器进行仿真实验的界面。图中原始信号为滤波器的输入信号,经滤波后的信号为图中的输出信号。采用方波信号为输入信号,采用零相位数字带通滤波器进行滤波,获取方波信号的某波信号如图中输出信号所示

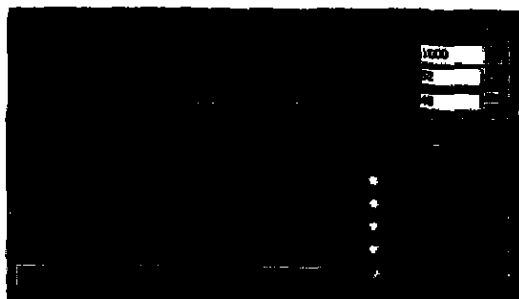


图4 零相位数字滤波器仿真实验界面

输出信号过零点与方波信号的跳变点在时间轴上处于同一位置,这正是方波信号与其基波信号具有的相位关系。这一实验再次表明:本文所提出的零相位数字滤波方法确实保持了原信号分量的相位不变。

3 零相位数字滤波器实现

从前面的论述可以看到,FRR与RRF方法滤波,其频域描述都如(9)式所示。因此,如果将所用滤波器 $H(e^{j\omega})$ 连同FRR(或RRF)方法看作组成某一系统的构件与逻辑,那么这一系统的频率响应就是

$$H_v(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (18)$$

幅频特性是所有滤波器设计工作都要满足的设计要求,而附加的线性相位特性要求通常增加了设计的难度,特别是IIR滤波器都是非线性相位的。假如提出零相位的要求,似乎是一个更苛刻的设计约束条件,然而通过上述我们已经知道,实现零相位非常简单:不

管 $H(e^{j\omega})$ 具有多么奇怪的相频特性,在FRR(或RRF)逻辑之下,都可以实现具有(9)式所描述的频率特性的系统——零相位数字滤波器。

实际上,所得到的(18)式是所有零相位数字滤波器的频域描述,由此可以得到零相位数字滤波器的单位冲激响应 $h_v(n)$ 如(19)式所示。

$$h_v(n) = h(-n) * h(n) \quad (19)$$

从(19)式可知,可以由 $h(n)$ 直接构造出零相位数字滤波器,而无须使用上述的FRR(或RRF)方法,因此设计起来更为直接而且更方便。

尽管零相位数字滤波器是理想的线性相位滤波器,但其设计工作竟反而更加简单:因为只需考虑 $H(e^{j\omega})$ 的幅频特性要求,从而只需考虑对 $H(e^{j\omega})$ 的幅频特性要求。

关于零相位数字滤波器的设计,完全可以按照传统的滤波器设计方法,设计满足幅频特性的 $H(e^{j\omega})$,而毋须考虑相位问题。假设 $H(e^{j\omega})$ 在其通带的模为1,允许误差(或波纹)为 δ ,其相应的 $H(e^{j\omega})$ 在通带的模为1,而允许误差假设为 Δ 。我们来看 Δ 应满足什么条件,才能保证零相位数字滤波器的精度要求

根据(18)式有:

$$1 + \delta = (1 + \Delta)^2 \quad (20)$$

展开(20)式:

$$1 + \delta = 1 + 2\Delta + \Delta^2 \quad (21)$$

忽略 Δ^2 得: $\Delta = \delta/2$

可以根据(21)式来控制 $H(e^{j\omega})$ 在通带的精度,从而满足零相位数字滤波器通带精度要求。由(18)式还可看出, $H_v(e^{j\omega})$ 的阶是 $H(e^{j\omega})$ 阶的两倍,从而可以更接近于理想滤波器,有更短的过渡带。这就意味着零相位数字滤波器的过渡带指标比较容易实现。

4 结论

上述可知,零相位数字滤波的实现,可以通过FRR(或RRF)方法来实现(18)式所示的零相位数字滤波器,也可以由(19)式直接进行构造。FRR(或RRF)方法通过数学手段,它必须将信号序列作“时间上的反转”处理。(19)式所示的方法表明,它本质上是使用 $h(n)$ 和 $h(-n)$ 这两个环节来构造零相位数字滤波器,其中必有一个环节为“非因果滤波器”,同样必须借助于“时间上的反转”处理。然而“时光不能倒流”,因此从物理上这两种方法都无法实现,也就是说,这两种构造零相位数字滤波器的思想无法应用于靠硬件实现的参数滤波器设计。然而,却可以通过软件来实现,而这正是虚拟仪器所采用的手段。从这里可得

到启示:虚拟仪器不仅可以实现硬件仪器的“软化”,而且可以超越硬件仪器世界所采用的方法。因此,虚拟仪器的开发工作者,思想上不能拘泥于硬件仪器“物理上可实现”的框架束缚,而应该充分利用数学工具,设计出具有“物理功能”的“虚拟”仪器。

参考文献:

[1] ALAN V. OPPENHEIM ALAN S. WILLSKEY WITH S. et al 信号与系统[M]. 刘树棠译 西安:西安交通大学出版社,1998

版社,1998

[2] 楼顺天,李博菡. 基于 Matlab 的系统分析与设计—信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1998

[3] LATHI, BP. Linear Systems and Signals[M]. Cunniffed, CA: Berkeley-Cambridge Press, 1992

[4] ANTONIOU A. Digital Filters, Analysis, Design, and Applications [M]. 2nd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1993

[5] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 北京:清华大学出版社, 1995

Digital Filtering with Zero Phase Error

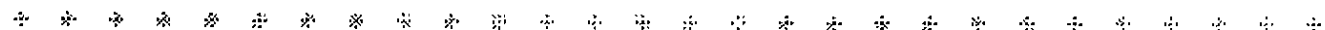
Ji Yue-bo, QIN Shu-ren, TANG Bao-ping

(College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Aiming at the problem of phase error caused by normal filters in signal processing, summarizes the important meaning of digital filtering with zero-phase error. Puts forward RRF Filtering which is a new way to realize digital filtering with zero-phase error through reversing the time serials of the signal. Another way to realize digital filtering with zero-phase error is suggested through reversing the time serials of normal filter. Testifies the way to realize digital filtering with zero-phase error. Points out how to design the digital filter with zero phase-frequency peculiarity. Solves the problem of phase error in DSP.

Key words: zero phase; digital filter; phase; filter; virtual instrument

(责任编辑 成孝义)



(上接 3 页)

Experimental Study about the Plasma Activated Water on the Performance of the Concrete

LIAO Zhen-fang, TANG Chuan-lin, LIU Mei-sheng, ZHANG Feng-hua

(Mechanical Engineering Institute, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A new good idea to improve the performance of the concrete by plasma activated water is put forward. The work principle of electrohydraulic impulsed technology for producing plasma activated water is introduced. Some experimental data of improving the performance of the concrete by the plasma activated water are reported. The study shows that improving the performance of concrete by plasma activated water is practical and the view points provided by the authors is correct.

Key words: concrete; plasma activate water; electrohydraulic impulsed technology

(责任编辑 成孝义)