

文章编号:1000-582x(2000)06-0126-05

M-通道分解综合系统新框架 及其信号的最佳对称延拓策略

龚 劬¹, 曹长修², 龚 箭³

(1 重庆大学 系统工程与应用数学系, 重庆 400044;

2. 重庆大学 自动化学院, 重庆 400044; 3. 重庆工业管理学院 信息系, 重庆 400044)

摘 要: 在利用小波变换进行图象压缩时,需对图象进行边界处理以减小边界误差。一个行之有效的边界处理方法是对称延拓,存在许多不同的对称延拓。笔者提出了最佳对称延拓的概念,给出了求最佳对称延拓的算法,并用该算法得出了一般的M-通道分解综合系统中各环节的最佳延拓和加窗方案。

关键词: 小波变换; 图象压缩; 对称延拓

M-通道分解综合系统

中图分类号: TN 911.73

文献标识码: A

近年来,利用小波变换进行图象压缩,可达到高压缩比和好的恢复图象,因此倍受关注,出现了各种基于小波变换的图象压缩方案^[1,2];特别是在某些特殊应用中,它有着其他压缩方案不可替代的位置^[3]。将来,它很可能成为新的静态图象压缩标准。尽管如此,基于小波变换的图象压缩技术还有待改进,还有许多问题值得探讨,其中之一便是图象的边界处理。边界处理的好坏直接影响图象的重构质量。迄今,解决该问题的方法大致有:边界延拓^[4],设计正交边界滤波器^[5]或时变滤波器^[6]来避免边界问题。由于时变滤波器的设计比较复杂,实现也比较困难;而正交边界滤波器又有可能破坏小波分解滤波器的性能。在实际的信号或图象压缩应用中,人们多采用边界延拓特别是对称延拓的方法。

文献^[7]通过引入“循环对称”的概念,将各种不同的对称性统一起来,将各种对称延拓方法归结为一个统一的模型,从而给出了对称延拓的比较完整而且一般的结果,可以看作现有对称延拓方法的一个总结。现有文献中的对称延拓方法都可归结为图1所示的框架,已有人证明了在该框架下,要确保分解并下抽样信号的对称性,分解滤波器的长度必须是模M同余的。例如,对M=2的2通道系统,分解滤波器的长度必须

同奇偶,然而存在大量奇偶性不同的完全重构滤波器组。笔者将上述框架进行了修改,使对称延拓方法适合于任何完全重构的线性相位滤波器组。在新框架下,提出了最佳对称延拓的概念,并给出求最佳对称延拓的新算法。推出了为保证不出现边界误差,对称延拓类型以及加窗方案的约束条件。

1 具有对称延拓和加窗处理的增广型M-通道系统

将图1作如下修改(见图2):送入每个通道的输入信号可作适合于相应滤波器的对称延拓处理(不同通道的对称延拓可以不同)。各通道的综合信号加窗也分别进行,允许不一样。称这种系统为增广型M-通道系统,相应的对称延拓称为增广型对称延拓。后面将看到这种增广型对称延拓方法适合于更广范围的完全重构的线性相位滤波器组。

1.1 循环对称性的分类

为叙述方便,先引入几个记号:

$Z, Z_{\text{even}}, Z_{\text{odd}}$:分别代表整数集,偶数集和奇数集;

$\frac{1}{2}Z$ 表示整数的 $\frac{1}{2}$ 倍,类似的有 $\frac{1}{2}Z_{\text{even}}, \frac{1}{2}Z_{\text{odd}}$ 等;有限长序列 $x(n)$ 的周期序列用 $\tilde{x}(n)$ 表示;周期序列 $x(n)$ 的周期用 N_T 表示。

· 收稿日期:2000-01-06

作者简介:龚劬(1963-),女,四川人,重庆大学副教授。主要研究方向为运筹与控制,小波分析,数字信号与图象处理。

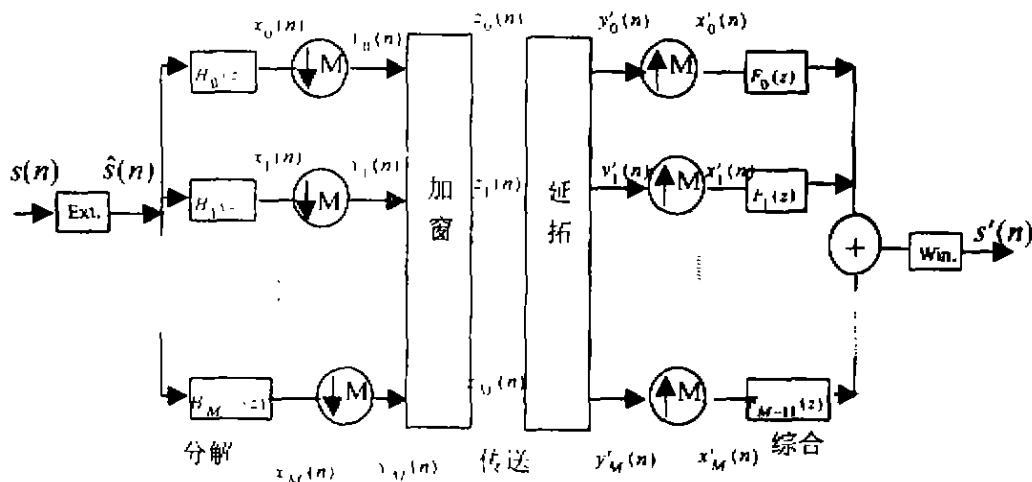


图1 具有延拓和加窗的分解/综合系统

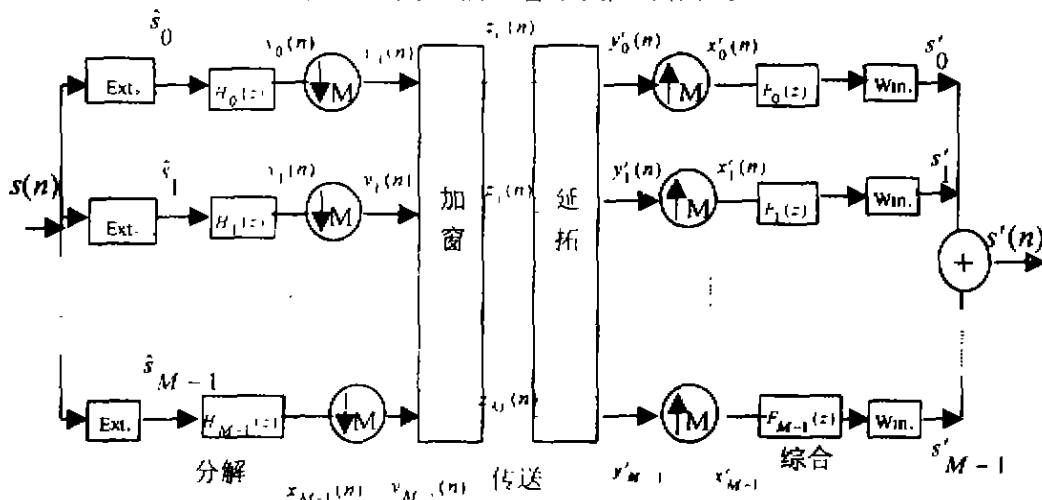


图2 具有延拓和加窗的增广型 M-通道系统

定义1 若一个有限长序列 $\{x(n), 1 \leq n \leq N_x\}$ 满足:

$$x(c_c + d) = J_r x(c_c - d)$$

其中 $c_c \in [1, \frac{N_x + 1}{2}]$; $v_c, d \in \frac{1}{2}Z$; $c_c \pm d \in Z$; $J_r = \pm 1$ 。则称 $\{x(n), 1 \leq n \leq N_x\}$ 是对称序列; c_c 称为对称中心, $J_r = \pm 1$ 称为对称极性; $J_r = 1$ 时为对称, $J_r = -1$ 时为反对称。 $\{x(n), 1 \leq n \leq N_x\}$ 的周期延拓序列 $\{\tilde{x}(n)\}$ 称为循环对称序列。

按照对称序列长度或循环对称序列的周期的奇偶性以及对称中心是 $\frac{1}{2}$ 的奇数倍, 还是 $\frac{1}{2}$ 的偶数倍, 可把对称序列和循环对称序列分为 A, B, C, D 四种类型, 见表 1。

1.2 循环对称序列的特性

定理1 设有限长滤波器 $\{h(n), 1 \leq n \leq l\}$ 关于 c_h 对称, $\{s(n), 1 \leq n \leq N_s\}$ 是对称序列, 则 $s(n)$

表1 对称和循环对称序列的类型

类型	N_s	c_c
A	Z_{even}	$\frac{1}{2}Z_{\text{odd}}$
B	Z_{even}	$\frac{1}{2}Z_{\text{even}}$
C	Z_{odd}	$\frac{1}{2}Z_{\text{odd}}$
D	Z_{odd}	$\frac{1}{2}Z_{\text{even}}$

经滤波(循环卷积), 再 M 下抽样后的输出 $y(n)$ 是周期为 $N_y = \frac{N_s}{M}$ 的循环对称序列, 当且仅当 $(c_c + c_h) \in \frac{M}{2}Z, N_y \in MZ$ 。且有 $y(n)$ 的对称中心 $c_y = \frac{c_c + c_h + \rho \frac{N_s}{2}}{M}$, 其中 $\rho \in Z$, 周期 $N_y = \frac{N_s}{M}$, 对称极性

$$J_y = J J_h$$

2 增广型 M - 通道系统的最佳对称延拓方法

2.1 增广型 M - 通道系统中对称延拓的非膨胀性约束

设 $\hat{s}_k(n)$ 是由输入序列 $s(n)$ 经延拓后的循环对称序列,由文献[7]中的结论, N_{z_k} 和 N_s 应满足约束:

$$N_{z_k} = 2N_s + N_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

其中 $N_0^{(k)}$ 的取值在表 2 中给出。

表 2 延拓类型与各变量之间的关系

类型	c_k	$N_0^{(k)}$
A	$\frac{1}{2} Z_{\text{odd}}$	$0 + 2l$
B	$\frac{1}{2} Z_{\text{even}}$	$-2 + 2l$
C	$\frac{1}{2} Z_{\text{odd}}$	$-1 + 2l$
D	$\frac{1}{2} Z_{\text{even}}$	$-1 + 2l$

$y_k(n)$ 所需的最小存储长度:

$$N_{z_k} = \frac{1}{2} N_{y_k} + \frac{1}{4} J_{y_k} \{ 2 + (-1)^{2c_k} [1 + (-1)^{N_{y_k}}] \} \quad (1)$$

第 k 通道最小存储长度的超出量定义为

$$\lambda_k = N_{z_k} - \frac{N_s}{M} \quad (2)$$

M 个通道的存储长度超出总量为:

$$\lambda = \sum_{k=1}^M \lambda_k$$

若 $y_k(n)$ 所需的存储总长度不超过输入信号的长度,则称其具有非膨胀性。下面的定理给出了非膨胀性约束条件以及相应的循环对称延拓的约束条件。

定理 2 对一个 M - 通道线性相位滤波器组,非膨胀对称延拓应满足如下条件:

$$\begin{cases} c_k + c_{h_k} \in \frac{M}{2} Z & (3) \\ 2N_s + N_0^{(k)} \in MZ & (4) \end{cases}$$

及

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{N_0^{(k)}}{M} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{M-1} J_{y_k} \left[2 + (-1)^{\frac{2(c_k + c_{h_k})}{M}} (1 + (-1)^{\frac{2N_s + N_0^{(k)}}{M}}) \right] \leq 0 \quad (5)$$

其中(3),(4)为对称性约束条件。

2.2 确定最佳对称延拓与加窗方案的算法

2.1 节讨论了关于 M - 通道线性相位滤波器组的非膨胀性约束条件(3) ~ (5),由对称性约束,可确定对称延拓的类型。其目的是要寻求在满足对称性约束的条件下,使各通道所需的存储长度的超出量最小的对称延拓方法。该问题可归结为下述优化模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_k \\ \text{s. b.} \quad & \begin{cases} c_k + c_{h_k} \in \frac{M}{2} Z \\ 2N_s + N_0^{(k)} \in MZ \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 c_k, l 和延拓类型为决策变量, λ_k 由(1),(2)给出,延拓类型与各变量间的关系由表 2 给出。

第 k 通道 ($k = 0, 1, \dots, M - 1$) 的存储需求 N_{z_k} :

$$N_{z_k} = \lambda_k + \frac{N_s}{2} \quad (7)$$

算法:给定输入序列 $s(n), 1 \leq n \leq N_s$ 和分解滤波器 $h_k(n)$,给出下述算法来构造最佳延拓方法和加窗策略。

1) 求解优化问题(6);

2) 由 1) 所得结果计算 $N_0^{(k)}$;

3) 构造对称延拓 \hat{s}_k 满足: a) $N_{z_k} = 2N_s + N_0^{(k)}$; b) c_k ; c) $J_{\hat{s}_k} = 1$;

4) 构造加窗方案满足: a) $N_{z_k} = \lambda_k + \frac{N_s}{2}$, b) $c_k = \frac{c_k + c_{h_k}}{M}$, c) $J_{y_k} = J_{h_k}$;

2.3 增广型 M - 通道系统各通道输入序列的最佳对称延拓

利用上节所给算法,计算出了 $M \in Z_{\text{even}}$ 和 $M \in Z_{\text{odd}}$ 时,在 c_k 和 N_s 取值的各种情形下各通道输入序列的最佳延拓参数(以存储量最小为目标),在表 3,表 4 中给出。

对于 $J_{h_k} = -1$ 时,可类似地得到。

例:设 3 - 通道系统各通道滤波器的对称极性分别为: $J_{h_0} = J_{h_1} = 1, J_{h_2} = -1$, 对称中心分别为: $c_{h_0} = \frac{55}{2}, c_{h_1} = \frac{40}{2}, c_{h_2} = \frac{44}{2}$; 输入序列的长度为 $N_s = 256$ 。

显然, $r_0 = 1 \in Z_{\text{odd}}, r_1 = 4 \in Z_{\text{even}}, r_2 = 2 \in Z_{\text{even}}, N_s \in 3Z + 1$, 则由表 3 和表 4 可得:

第 0 通道输入的延拓参数: 延拓类型: $B_l, c_{h_0} = \frac{3Z_{\text{odd}} - r_0}{2}$, 可取 $c_k = 1; l = 0, N_{z_0} = 2N_s - 2 = 510; \lambda_0 = -\frac{1}{3}, N_{c_{h_0}} = \frac{N_s - 1}{3}$ 。

表 3 $M \in Z_{\text{even}}, J_{l_i} = 1$ 时各通道输入序列的最佳延拓参数

$$\left(c_{i_2} \in \frac{2MZ - r_k}{2}, N_i \in MZ + r_N, r_k, r_N \in Z, 0 \leq r_k < 2M, 0 \leq r_N < M \right)$$

r_k	r_N	类型	c_{i_2}	l	N_{i_2}	λ_i
Z_{odd}	0	A	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	0	$2N_i$	0
	$\left(0, \frac{M}{2}\right]$	A	$\frac{MZ - r_k}{2}$	$\frac{M}{2} - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
	$(0, M)$	A	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$M - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
Z_{even}	$\left[0, \frac{2-M}{2}\right]$	B	$\frac{MZ - r_k}{2}$	$\frac{2-M}{2} - r_N$	$2N_i - M - 2r_N$	$-\frac{r_N}{M}$
	$[0, 1]$	B	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$1 - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$-\frac{r_N}{M}$
	$\left(1, \frac{M+2}{2}\right]$	B	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$ (或 $\frac{MZ_{\text{even}} - r_k}{2}$)	$\frac{M+2}{2} - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$\frac{1}{2} - \frac{r_N}{M}$
	$\left(\frac{M+2}{2}, M\right]$	B	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$M+1 - r_N$	$2N_i + 2M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$

表 4 $M \in Z_{\text{odd}}, J_{l_i} = 1$ 时各通道输入序列的最佳延拓参数

$$\left(c_{i_2} \in \frac{2MZ + r_k}{2}, N_i \in MZ + r_N, r_k, r_N \in Z, 0 \leq r_k < 2M, 0 \leq r_N < M \right)$$

r_k	r_N	类型	c_{i_2}	l	N_{i_2}	λ_i
Z_{odd}	$[0, 1]$	B	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$1 - r_N$	$2N_i - 2r_N$	$-\frac{r_N}{M}$
	$\left(1, \frac{M+1}{2}\right]$	D	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$\frac{M+1}{2} - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
	$(1, M)$	C	$\frac{MZ_{\text{even}} - r_k}{2}$	$\frac{M+1}{2} - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
	$(1, M)$	B	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$M - r_N + 1$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
Z_{even}	0	A	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	0	$2N_i$	0
	1	B	$\frac{MZ_{\text{even}} - r_k}{2}$	0	$2N_i - 2$	$1 - \frac{1}{M}$
	$(0, M)$	D	$\frac{MZ_{\text{even}} - r_k}{2}$	$\frac{M+1}{2} - r_N$	$2N_i + M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$
	$(0, M)$	A	$\frac{MZ_{\text{odd}} - r_k}{2}$	$M - r_N$	$2N_i + 2M - 2r_N$	$1 - \frac{r_N}{M}$

第 1 通道输入的延拓参数: 延拓类型取 A, B, C, D 均可, 不同延拓类型对应的参数也各异, 不妨取与第 0 通道相同的类型, B 型, 其它参数分别为: $c_{i_2} = \frac{3Z_{\text{even}} - r_1}{2}$, 可取 $c_{i_2} = 1; l = 0, N_{i_2} = 2N_i - 2 = 510$.

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, N_{z_1} = \frac{N_i + 2}{3}.$$

第 2 通道输入的延拓参数: 延拓类型: B, 其它参数分别为: $c_{i_2} = \frac{3Z_{\text{even}} - r_2}{2}$, 可取 $c_{i_2} = 2; l = 0, N_{i_2} =$

$$2N_1 - 2 = 510, \lambda_2 = -\frac{4}{3}, N_{z_2} = \frac{N_1 - 4}{3}$$

由于存储需求超出量 $\lambda = \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = -1 < 0$, 满足非膨胀性条件。

对应上述参数的各通道对称延拓分别构造如下:

$$\hat{s}_0(n) = \begin{cases} s(n) & 1 \leq n \leq N_1 \\ s(2N_1 - n) & N_1 < n \leq 2N_1 - 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\hat{s}_1(n) = \hat{s}_0(n) \quad (9)$$

$$\hat{s}_2(n) = \begin{cases} s(2) & n = 1 \\ s(n-1) & 2 \leq n \leq N_1 + 1 \\ s(2N_1 - n - 1) & N_1 + 1 < n \leq 2N_1 - 2 \end{cases} \quad (10)$$

第0通道发送端的加窗方案: $c_{y_0} = \frac{c_{i_0} + c_{k_0}}{3} =$

$\frac{19}{2}, N_{z_0} = 85, J_{y_0} = 1$, 因此对应于延拓(8)的加窗方案

为: $z_0(n) = y_0(10 + n) \quad 1 \leq n \leq 85$

第1通道发送端的加窗方案: $c_{y_1} = \frac{c_{i_1} + c_{k_1}}{3} = 7,$

$N_1 = 84, J_{y_1} = 1$, 因此对应于延拓(9)的加窗方案为:

$$z_1(n) = y_1(7 + n) \quad 1 \leq n \leq 86$$

第2通道发送端的加窗方案: $c_{y_2} = \frac{c_{i_2} + c_{k_2}}{3} = 8,$

$N_2 = 84, J_{y_2} = -1$, 因此对应于延拓(10)的加窗方案

为:

$$z_2(n) = \begin{cases} y_2(8 + n) & 1 \leq n \leq 42 \\ y_2(8 + n + 1) & 43 \leq n \leq 84 \end{cases}$$

参考文献:

- [1] DEVORE R A. Image compression through wavelet transform coding[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 17: 38: 719-746.
- [2] SHPIO J M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, SP-41(12): 3 445-3 462.
- [3] 唐金山. 基于小波变换的热图象压缩[J]. 模式识别与人工智能, 1996, 9(4): 377-381.
- [4] KARSSON G, VETTERLI M. Extension of finite length signals for sub-band coding[J]. Signal Processing, 1989, 17: 161-168.
- [5] CORMAC HERLEY. Tiling of the timing-frequency plane: construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 41: 3 341-3 359.
- [6] HERLEY C, VETTERLI M. Orthogonal time-varying filter banks and wavelets[J]. Proc IEEE Int Symp Circuits Syst, 1993, 1: 391-394.
- [7] LI CHEN, TRUONG Q, NGUYEN, et al. Symmetric extension methods for M-channel linear-phase perfect-reconstruction filter banks[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1995, 43: 2 505-2 511.

Framework of M-channel Systems and the Best Symmetric Extension

GONG Qu¹, CAO Chang-xiu², GONG Jian³

(1 College of System Engineering & Applied Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400044; 2 College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 3 Department of Information, Chongqing Institute of Industrial Management, Chongqing 400000, China)

Abstract: In image compression based on wavelet transform, the borders of images have to be processed in advance so as to reduce the distortions around the borders. An efficient way for this problem is symmetric extension. There are different types of symmetric extension methods. The paper presents the best symmetric extension and gives a design algorithm. Using the algorithm, we obtain the scheme of extending and windowing the signals in general best M-channel analysis/synthesis system.

Key words: wavelet transform; image compression; symmetric extension

(责任编辑 张小强)