2001 年 1 月
第 24 卷第 1 期
重庆大学学报 (自然科学版)
Journal of Chongqing University(Natural Science Edition)
Vol.24 No.1
Jan.2001

文章编号:1000-582x(2001)01-0084-05

均匀电介质椭球内的极化场强的求解*

胡文江[1], 胡先权[2]
(1. 重庆邮电学院 电子信息工程系,重庆 400065; 2. 重庆师范学院物理系,重庆 400047)

摘 要:采用椭球坐标经推导严格求出了均匀外电场中电介质椭球体内的极化场强,明确指出某些教科书关于椭球体内极化场强方向与外电场方向严格相反这一结论,必须附加一定条件才能成立。通过采用网格计算方法与变步长相结合,计算了极化场强方向与外电场方向的方向夹角,并分析了该夹角随椭球体三半轴 a、b、c 的变化趋势。

关键词:电介质; 电介质极化; 极化场强; 相对介电常数; 椭球坐标系
中图分类号:O 441.1　　**文献标识码**:A

均匀电介质处于外加电场($\boldsymbol{E}_0$)中时,电介质极化,其电介质表面出现极化电荷,在其周围空间产生一个附加电场 $\boldsymbol{E}'$,这时空间任意一点的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{E}'$ 与极化电荷有关、极化电荷又与电介质的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 有关,由于电介质是在电场作用下极化的,所以极化强度 $\boldsymbol{P}$ 必然决定于介质中的总电场强度 $\boldsymbol{E}$,由此可见,介质中的总电场强度 $\boldsymbol{E}$,外加电场 $\boldsymbol{E}_0$、介质中的极化电荷以及介质的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 之间存在相互作用相互制约的关系。关于 $\boldsymbol{E}'$ 与 $\boldsymbol{E}_0$ 的关系,一般来说,在介质内部,$\boldsymbol{E}'$ 与 $\boldsymbol{E}_0$ 大致方向相反,所以极化电荷在介质内部产生的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 总是起着减弱场强的作用。因此,介质内 $\boldsymbol{E}'$ 常称为(退)极化场。有的教科书认为:"任意几何形状的均匀电介质,在均匀外场中极化时,其体内的 $\boldsymbol{E}'$ 只是大体上与 $\boldsymbol{E}_0$ 方向相反,对于球和椭球等几种特殊的几何形状、体内的 $\boldsymbol{E}'$ 是均匀的,它严格地与 $\boldsymbol{E}_0$ 方向相反[1]。"笔者认为对椭球体而言,上述结论必须附加一定条件才能成立。对于椭球体,一般说来,$\boldsymbol{E}'$ 与 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向并不严格相反,只有当 $\boldsymbol{E}_0$ 与介质椭球的某一主轴平行时,$\boldsymbol{E}'$ 与 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向才严格相反。文献[2]采用椭球坐标系求出了回转椭球体($a > b = c$)的退极化系数。我们采用椭球坐标求解了一般椭球($a \neq b \neq c$)内的退极化系数,获得了椭球体内极化场强的数学表达式;依据 a、b、c 的不同值,采用网格计算法计算了椭球内的极化场强 $\boldsymbol{E}'$ 与外电场均匀 $\boldsymbol{E}_0$ 之间的夹角,并分析了该夹角随 a、b、c 的变化趋势。

1 均匀外场中的椭球极化

在笛卡尔坐标系中,均匀电介质椭球体为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$,其中 a、b、c 为椭球的 3 个半轴。我们选择坐标的顺序,使得 $a \geqslant b \geqslant c$,并且暂时不讨论 3 个半轴中有相等的情形。又设椭球体置于均匀外场 $\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ 中,椭球体内的介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$,椭球体外为真空。欲求解总场强 $\boldsymbol{E}$,须先求解电势 $\varphi = (x, y, z)$ 的分布[3],椭球内外的电势 $\varphi = (x, y, z)$ 满足拉普拉斯(Laplac)方程及如下定解条件

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \varphi = 0 \\ &\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \text{(在椭球表面处)} \\ &\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \qquad \text{(在椭球表面处)} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 φ_1、φ_2 分别为椭球体内外的电势。根据上述边界条件,引入椭球坐标系[3](ξ, η, ζ),它与笛卡儿坐标系的关系是[4]

$$x = \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}$$

* 收稿日期:2000-04-14
基金项目:重庆市教育委员会资助项目(990213)
作者简介:胡文江(1972-),男,重庆市人,重庆邮电学院电子信息工程系讲师。从事电子信息技术、电磁场理论教学与研究。

$$y = \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2} \tag{3}$$

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2}$$

由于(ξ,η,ζ)为正交曲面坐标，所以长度元

$$dl^2 = h_1^2(d\xi)^2 + h_2^2(d\eta)^2 + h_3^2(d\zeta)^2$$

其中

$$h_1^2 = \frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{4R_\xi^2},\ h_2^2 = \frac{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}{4R_\eta^2}$$

$$h_3^2 = \frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{4R_\zeta^2}$$

$$R_\mu = \sqrt{(\mu+a^2)(\mu+b^2)(\mu+c^2)} \tag{4}$$

$$(\mu = \xi,\eta,\zeta) \tag{5}$$

由(3)式可求出椭球坐标系的 Laplac 算子为

$$\nabla^2 = W\Big[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big) + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)\Big] \tag{6}$$

其中

$$W = \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}$$

设椭球中心为电势零点，则外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电势为

$$\varphi_0 = -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r} = -(E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z) = (\varphi_{0x}+\varphi_{0y}+\varphi_{0z}) \tag{7}$$

$\varphi_{0x},\varphi_{0y},\varphi_{0z}$ 分别为外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的分向量 $E_{0x}\boldsymbol{i},E_{0y}\boldsymbol{j},E_{0z}\boldsymbol{k}$ 相应的电势。即

$$\varphi_{0x} = -E_{0x}x = -\frac{E_{0x}\sqrt{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}$$

$$\varphi_{0y} = -E_{0y}y = -\frac{E_{0y}\sqrt{(b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}}{\sqrt{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}$$

$$\varphi_{0z} = -E_{0z}z = -\frac{E_{0z}\sqrt{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \tag{8}$$

若极化电荷产生的电势为

$$\varphi' = \varphi'_x + \varphi'_y + \varphi'_z \tag{9}$$

其中 $\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z$ 分别为 $\boldsymbol{E}'$ 的分向量 $E'_{0x}\boldsymbol{i},E'_{0y}\boldsymbol{j},E'_{0z}\boldsymbol{k}$ 相应的电势。在椭球内有 $\varphi'_1 = \varphi'_{1x}+\varphi'_{1y}+\varphi'_{1z}$；在椭球外有 $\varphi'_2 = \varphi'_{2x}+\varphi'_{2y}+\varphi'_{2z}$。在椭球内，椭球外的总电势分别为：

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 + \varphi'_1 = \varphi_{1x}+\varphi_{1y}+\varphi_{1z}\\ \varphi_2 &= \varphi_0 + \varphi'_2 = \varphi_{2x}+\varphi_{2y}+\varphi_{2z}\end{aligned} \tag{10}$$

椭球内，外总场强分别为 $\boldsymbol{E}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1,\boldsymbol{E}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2$。显然

$$\varphi_{\lambda x} = \varphi_{0x} + \varphi'_{\lambda x}\quad \varphi_{\lambda y} = \varphi_{0y} + \varphi'_{\lambda y}$$

$$\varphi_{\lambda z} = \varphi_{0z} + \varphi'_{\lambda z}(\lambda = 1,2) \tag{10'}$$

对于均匀介质，极化电荷体密度 $\rho' = 0$、所以

$$\nabla^2\varphi' = 0 \tag{11}$$

根据静电场第一类边界条件解的唯一性原理[3]，进而有

$$\nabla^2\varphi'_{\lambda x} = 0,\nabla^2\varphi'_{\lambda y} = 0,\ \nabla^2\varphi'_{\lambda z} = 0,(\lambda = 1,2) \tag{12}$$

先求(12)中第一组方程

$$\nabla^2\varphi'_{1x} = 0,\nabla^2\varphi'_{2x} = 0 \tag{13}$$

的解。由于与上述椭球共焦点的二次曲面分别为 3 个正交的椭球族、单叶双曲面族、双叶双曲面族[4]，考虑到边界条件及对称性的要求，以及第一类边界条件下解的唯一存在性，可设

$$\varphi'_{\lambda x}(\xi,\eta,\zeta) = \varphi_{0x}(\xi,\eta,\zeta)F_\lambda(\xi),(\lambda = 1,2) \tag{14}$$

将(14)代入(13)，注意到

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi'_{1x} = {}& W\Big[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi_{0x}F_1)\Big) + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}(\varphi_{0x}F_1)\Big) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}(\varphi_{0x}F_1)\Big)\Big] = \\ & F_1(\xi)\nabla^2\varphi_{0x} + \frac{4R_\xi}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)}\Big(\varphi_{0x}\frac{\partial R_\xi}{\partial\xi}\frac{dF_1}{d\xi} + 2R_\xi\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\xi}\frac{dF_1}{d\xi} + R_\xi\varphi_{0x}\frac{d^2F_1}{d\xi^2}\Big)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_{0x}}{a^2+\xi}$$

$$\frac{\partial R_\xi}{\partial\xi} = \frac{R_\xi}{2}\Big(\frac{1}{a^2+\xi}+\frac{1}{b^2+\xi}+\frac{1}{c^2+\xi}\Big)\quad \nabla^2\varphi_{0x} = 0$$

于是得到 $F_1(\xi)$ 满足如下微分方程

$$\frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi}(\ln(R_\xi(a^2+\xi)))\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} = 0 \tag{15}$$

同理

$$\frac{\mathrm{d}^2F_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\ln(R_\xi(a^2+\xi)))\frac{\mathrm{d}F_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=0 \quad (15')$$

笛卡尔坐标系的原点(0,0,0)对应于椭球坐标($\xi=-a^2,\eta=-b^2,\zeta=-c^2$)，$\varphi'_{1x}$为椭球内的调和函数，满足$\varphi'_{1x}|_{(0,0,0)}$有限，也即要求$\varphi_{0x}(\xi,\eta,\zeta)F_1(\xi)|_{(-a^2,-b^2,-c^2)}=$有限，进而要求$F_1(\xi)|_{\xi=-a^2}=$有限，由(15)式可知，在椭球内$F_1(\xi)$满足，$\frac{\mathrm{d}F_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=0$，即有$F_1(\xi)=C_0$(常数)。

在椭球外部$\xi>0,\eta>0,\zeta>0$，$F_2(\xi)$满足连续，可导的要求。对(15′)式进行积分运算，有

$$\frac{\mathrm{d}F_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\frac{c_2}{(a^2+\xi)^{3/2}(b^2+\xi)^{1/2}(c^2+\xi)^{1/2}}=\frac{C_2}{R_\xi(a^2+\xi)} \quad (16)$$

由于极化电荷激发的场强E'和电势φ'在无限远处趋于0，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi'_{2x}=0$，因而$\lim\limits_{\xi\to\infty}F_2(\xi)=0$，再次对(16)式进行积分，得

$$F_2(\xi)=C_2\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)} \quad (17)$$

根据广义积分收敛的判定定理[5]，上式中的被积函数$\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi^{3/2}\frac{1}{R_\xi(a^2+\xi)}=0$可判定(17)式为收敛积分。这样，由(10′)，(14)式，有

$$\varphi_{1x}=\varphi_{0x}+\varphi'_{1x}=(1+C_0)\varphi_{0x}=C_1\varphi_{0x} \quad (18)$$

$$\varphi_{2x}=\varphi_{0x}+\varphi'_{2x}=\left(1+C_2\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}\right)\varphi_{0x} \quad (19)$$

由边界条件$\varphi_{1x}|_{(a,0,0)}=\varphi_{2x}|_{(a,0,0)}$，笛卡尔坐标($x=a,y=0,z=0$)，对应椭球坐标($\xi=0,\eta=-b^2,\zeta=-c^2$)，可得

$$C_1=1+C_2\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)} \quad (20)$$

利用电位移矢量$\boldsymbol{D}$的法向分量在椭球面上连续的特性，以及(2)式的边界条件并注意到

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{(a,0,0)}=2a$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}\right)\right|_{(a,0,0)}=-\frac{2}{abc}$$

可得

$$\varepsilon C_1=-\frac{2\varepsilon_0C_2}{abc}+\varepsilon_0\left(1+C_2\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}\right) \quad (21)$$

联立求解(20)，(21)式，有

$$C_1=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}$$
$$C_2=-\frac{1}{2}\frac{abc(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x} \quad (22)$$
$$n_x=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}$$

于是求得

$$\varphi_{1x}=-\frac{\varepsilon_0E_{0x}x}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x} \quad (23)$$

$$\varphi_{2x}=-E_{0x}x\left(1-\frac{abc(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2(\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x)}\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}\right) \quad (24)$$

采用推导(14)～(24)类似方法，可求得φ_{1y}，φ_{2y}，φ_{1z}，φ_{2z}。这样，空间的电势分布为

$$\varphi_1=-\frac{\varepsilon_0E_{0x}x}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}-\frac{\varepsilon_0E_{0y}y}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y}-\frac{\varepsilon_0E_{0z}z}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z} \quad (25)$$

$$\varphi_2=-E_{0x}x\left\{1-\frac{abc(\varepsilon-\varepsilon_0)\int_\xi^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)}}{2(\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x)}\right\}-E_{0y}y\left\{1-\frac{abc(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2(\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y)}\int_\eta^\infty\frac{\mathrm{d}\eta}{R_\eta(b^2+\eta)}\right\}-E_{0z}z\left\{1-\frac{abc(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2(\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z)}\int_\zeta^\infty\frac{\mathrm{d}\zeta}{R_\zeta(c^2+\zeta)}\right\} \quad (26)$$

其中

$$n_x=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi(a^2+\xi)},\ n_y=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\eta}{R_\eta(a^2+\eta)}$$
$$n_z=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\zeta}{R_\zeta(a^2+\zeta)} \quad (27)$$

(26)式中的3个变下限积分均是收敛的。积分结果中出现的自变量ξ,η,ζ应利用(3)式的逆变换化成自变量x,y,z。使得$\varphi_2=\varphi_2(x,y,z)$。又因$n_x,n_y,n_z$均只与椭球常数$a,b,c$有关，并且根据(27)式将椭球整体放大$K$倍，$n_x,n_y,n_z$不变。这样，可由(25)式进行负梯度运算求得介质椭球内的电场分布

$$\boldsymbol{E}=\frac{\varepsilon_0E_{0x}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}\boldsymbol{i}+\frac{\varepsilon_0E_{0y}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y}\boldsymbol{j}+\frac{\varepsilon_0E_{0z}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z}\boldsymbol{k} \quad (28)$$

又因为 $E = E_0 + E'$，可得介质椭球内的极化场强

$$E' = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x E_{0x}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}\boldsymbol{i} - \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y E_{0y}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y}\boldsymbol{j} - \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z E_{0z}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z}\boldsymbol{k} \quad (29)$$

由于 φ_1,φ_2 既满足拉普拉斯方程，又满足边界条件，根据唯一性原理[6,7]，φ_1,φ_2 具有唯一确定性。因而由(28)式表示的椭球内的极化场强即为所求。上述计算结果表明：椭球内的极化场强仍然是均匀的。

2　计算与讨论

2.1　椭球内的极化场强 E' 与均匀外场 E_0 的夹角

E' 和 E_0 的夹角 θ 可表示为

$$\cos\theta = -\frac{\sum_i \dfrac{n_i(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0i}^2}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_i}}{K\sqrt{E_{0x}^2+E_{0y}^2+E_{0z}^2}} \quad (i = x,y,z) \quad (30)$$

其中

$$K = \sqrt{\sum_i\left(\frac{n_i(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0i}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_i}\right)^2} \quad (i = x,y,z) \quad (31)$$

2.1.1　当外场 E_0 沿 x 轴正方向时

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2}}\frac{n_x(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0x}^2}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{n_x(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0x}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}\right)^2}} = -1$$

此时 $\theta = \pi$，E' 与外场 E_0 方向相反。同理，当外场 E_0 沿 y 轴或 z 轴正方向时，$\cos\theta = -1$，$\theta = \pi$。

2.1.2　一般情况下

E_0 的方向余弦分别为 $\cos\alpha = E_{0x}/|E_0|$，$\cos\beta = E_{0y}/|E_0|$，$\cos\gamma = E_{0z}/|E_0|$。

E' 的方向余弦分别为

$$\cos\alpha' = -\frac{1}{K}\frac{n_x(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0x}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_x}$$

$$\cos\beta' = -\frac{1}{K}\frac{n_y(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0y}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_y}$$

$$\cos\gamma' = -\frac{1}{K}\frac{n_z(\varepsilon-\varepsilon_0)E_{0z}}{\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0)n_z}$$

（其中 K 见(31)式）

当椭球半轴 $a \neq b \neq c$ 时，$n_x \neq n_y \neq n_z$，因而

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \neq \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} \neq \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}$$

这时有

$$-1 < \cos\theta < 0 \qquad \pi < \theta < 3\pi/2$$

2.2　数值计算结果

以电介质橡胶椭球为例，查表[8]，其相对介电常数 $\varepsilon_r = 3.3$，又设 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{3}/3 = 0.577\,35$。采用网格计算法[9]与变步长相结合，用微机计算了不同的(a,b,c)所对应的 n_x,n_y,n_z 以及求出了相应的 $\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma',\cos\theta$。如表 1 所示。计算 n_x，n_y，n_z 时，积分上取值 1 100，步长 h 从 0.001 至 0.000 1。通过校验程序，使截断误差与计算误差之和控制在 0 5‰ 以内，确保 4 位有效数字。

表 1　不同几何参数的椭球的极化场强与外电场方向的夹角

($\varepsilon_r = 3.3$，外电场方向与三坐标轴正方向夹角相等)

a	b	c	n_x	n_y	n_z	$\cos\alpha'$	$\cos\beta'$	$\cos\gamma'$	$\cos\theta$	θ
1	1	1	0.666 65	0.666 65	0.666 65	−0.577 35	−0.577 35	−0.577 35	−1.000	180
2	1	0.5	0.112 3	0.284 5	0.601 9	−0.280 4	−0.540 4	−0.793 2	−0.931 9	158
2	1	1	0.173 5	0.413 0	0.413 0	−0.382 5	−0.653 3	−0.653 3	−0.975 2	167
2.5	1.5	0.5	0.103 5	0.208 8	0.686 5	−0.267 3	−0.451 3	−0.851 3	−0.906 4	155
2.5	2	1	0.189 6	0.254 0	0.555 9	−0.412 0	−0.500 4	−0.761 4	−0.966 4	165
3	2	1	0.156 2	0.267 0	0.576 2	−0.359 8	−0.518 0	−0.775 9	−0.954 8	162
3	2.5	2.5	0.285 9	0.356 7	0.356 7	−0.528 4	−0.600 3	−0.600 3	−0.998 2	176
5	3	1	0.103 4	0.208 8	0.686 8	−0.267 1	−0.451 1	−0.851 5	−0.906 3	155
5	4	1	0.115 7	0.157 7	0.725 6	−0.295 4	−0.374 1	−0.879 0	−0.894 1	153
5	4	2	0.189 3	0.253 7	0.555 7	−0.411 8	−0.500 3	−0.761 6	−0.966 3	165
4	2	1	0.112 2	0.284 6	0.602 2	−0.280 3	−0.540 4	−0.793 3	−0.931 8	158
7	4	1	0.077 45	0.170 1	0.751 3	−0.213 1	−0.396 4	−0.892 9	−0.867 5	150
8	4	1	0.065 39	0.174 2	0.759 2	−0.184 3	−0.403 2	−0.896 3	−0.856 7	149
10	6	2	0.103 4	0.208 6	0.686 7	−0.267 2	−0.451 2	−0.851 3	−0.906 4	155

(注：为便于对比，表中同时列出了橡胶介质球体($a = b = c$)的相关计算值)

从表中可见:

1) 除严格的球体($a = b = c$)其夹角 $\theta = 180°$ 外,其于椭球体极化场强 E' 与外场 E_0 的夹角并不严格相反,其夹角与 180° 有显著差异。

2) 椭球的三个半轴 a,b,c 的差别愈小,即椭球与严格球体愈接近,则 θ 的值与 180° 的值比较接近,反之,θ 的值与 180° 的值偏离愈大。例如$(a,b,c) = (3,2.5,2.5)$时,$\theta = 176°$,而$(a,b,c) = (8,4,1)$时,$\theta = 149°$。

3) 将椭球体整体放大或缩小,θ 的值不变。例如(a,b,c)分别等于(2.5,1.5,0.5),(5,3,1),(10,6,2)时,θ 的值均为 155°;(a,b,c) 分别为(2,1,0.5),(4,2,1)时,θ 的值均为 158°;(a,b,c) 分别为(2.5,2,1)、(5,4,2)时,θ 的值均为 165°。这与前述严格的理论证明是一致的。

3 结论

经过严格求解均匀外电场中电介质椭球体内的极化场强,说明椭球体内的极化场强是均匀的,E' 的方向一般说来与外电场 E_0 的方向并非严格相反。通过网格计算法与变步长相结合进行数值计算,进一步说明椭球的三个半轴 a,b,c 的差异愈大、极化场强 E' 与外场 E_0 的夹角 θ 与 180° 的偏离愈大。

参考文献:

[1] 赵凯华,陈熙谋.电磁学(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1991.188.

[2] Л Д 朗道,EM 栗弗席兹. 连续媒质电动力学[M] 北京:人民教育出版社,1979.38.

[3] 王竹溪,郭敦仁.特殊函数论[M].北京:科学出版社,1979,749.

[4] 白洪波. 两带电半椭球壳之间的相互作用 大学物理[M].北京:高等教育出版社,1999,11,22.

[5] 李成章,黄玉民.数学分析[M]. 北京:科学出版社.1999.337

[6] 吴崇试 数学物理方法[M] 北京:北京大学出版社,1999,267.

[7] 郭硕鸿. 电动力学(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,1997,59

[8] 钟兆娴,罗里熊. 基础物理学手册[M] 广西:广西人民出版社,1983,250

[9] 赵伊君,张志杰. 原子结构的计算[M] 北京:科学出版社,1987,77.

Solution the Polarization Field Strength inside Ellipsoid in a Homogeneous Dielectric

HU Wen - jiang[1], *HU Xian - quan*[2]

(1. Department of Electronic Information Engineering, Chongqing University of Post and Telecommunications, Chongqing 400065, China; 2. Department of Physics, Chongqing Teachers' College, Chongqing 400047, China)

Abstract: The solution of polarization field strength in ellipsoid and a homogeneous dielectric in condition of a constant external field is obtained with strict derivation and ellipsoidal coordinate. The conclusion that some textbooks given: the direction of polarization field strength with the direction of external field holds strict anti - parallel must be supplemented with additive certain conditions, otherwise it will not be correct. By means of the latticework and the step change calculation, the angle value of polarization vector with the external field is calculated and the changing situation about the angle value with the change of three half axes of ellipsoid is analysied.

Key words: dielectric; dielectric polarization; polarization field strength; relative permittivity; ellipsoidal coordinates

(责任编辑 吕赛英)