

文章编号:1000-582x(2001)01-0099-05

微矩形槽道内的气体滑移流动和传热分析

肖睿, 辛明道, 朱恂

(重庆大学工程热物理研究所学院, 重庆 400044)

摘要:分析了微矩形槽道内的不可压缩气体在速度滑移和温度跳跃区的流动和传热过程。在分析模型中,假定矩形槽道底面定热流加热,其余三面绝热,流动和换热均为充分发展,且处于滑移流动区。给出了截面上速度分布和温度分布的分析解,讨论了阻力特性和换热特性,并与实验结果作了比较。二者的吻合程度表明,在一定的 Knudsen 数范围内,传统的 Navier-Stokes 方程和能量方程在考虑了速度滑移和温度跳跃影响后可以描述微矩形槽道内的气体流动和传热过程。

关键词:微矩形槽道; 气体; 速度滑移; 温度跳跃; 理论分析

中图分类号:TK 124

文献标识码:A

针对各种微槽道的对流传热问题是近年来比较活跃的一个研究领域,其中尤以矩形槽道为多。微矩形槽道簇具有很高的换热能力。由微槽道构成的微型换热器具有结构紧凑、热负荷高、用料(工质)少等优点,它的许多热性能是相应的大尺寸结构所不能企及的。这些以微矩形槽道为基础的换热设备在解决集成电路的散热、超导技术中的低温冷却以及航空航天领域中的相关工程问题等应用中都表现出了非常乐观的应用前景。

文献[1]指出,当 $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ 时气体流动将进入速度滑移和温度跳跃区(Kn 是 Knudsen 数,即气体分子的平均自由程与流道特征尺寸之比)。对于微槽道内的气体滑移流动和传热问题,Harley、Pfahler、Wu 和 Little、Arkilic 等在实验方面作了大量的研究。大多数的实验表明阻力常数 $f \cdot Re$ 比宏观尺度下的相应结果小,但也有实验认为 $f \cdot Re$ 比宏观尺度下的相应结果大。同时,传统意义下的 $N-S$ 方程和能量方程与实验之间的偏差非常明显。

对于滑移流动区的气体微槽流动和换热问题,相对实验而言,理论分析做得很少。Sparrow^[2] 用考虑了滑移边界条件的 $N-S$ 方程和能量方程在定热流和定壁温两种情况下分析了气体在微圆管内的不可压缩充

分发展流动和换热。其结论表明阻力系数和换热系数均低于宏观尺度下的相应结果。Barron 等^[3] 在考虑了速度滑移和温度跳跃的情况下分析了圆管内的 Graetz 问题,其中假定速度已充分发展而热边界层正在发展。分析结果认为 Nu 数比非滑移情况下的值大。

迄今为止,尚未发现除圆管外的其它流道在滑移区的流动和换热理论分析解。本文将对底面定热流加热,而其余三面绝热的微矩形槽道内的滑移流动和换热问题进行分析,并求解其解析解。假定气体流动是不可压缩充分发展的。在边界上考虑速度滑移和温度跳跃(采用一阶滑移边界模型),在远离边界的中心区域仍采用传统的 $N-S$ 方程及能量方程。

1 速度场和温度场的求解

文献[1]从分子动力论的角度出发导出了滑移边界条件的一阶表达式如下:

$$U_s - U_w = \xi_{s0} \left. \frac{\partial U_x}{\partial y} \right|_s \quad (1)$$

$$T_s - T_w = \xi_{T0} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s \quad (2)$$

其中 y 为边界面上的法向坐标,脚标 s 表示壁面处的气体, w 表示固体壁面, ξ_{s0} 和 ξ_{T0} 分别为速度滑移系数和温度跳跃系数。

收稿日期:2000-09-06

基金项目:国家自然科学基金“九五”重大资助项目(59995550-3)

作者简介:肖睿(1975-),男,四川富顺人,重庆大学硕士研究生。主要研究方向:微尺度下的传热与传质。

1.1 速度场

假设流动和换热是定常、不可压缩和充分发展的,根据速度分布的对称性,由图1和(1)式可列出该情况下的控制方程和边界条件:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, u\left(\frac{w}{2}, y\right) + \xi_{u0} \frac{\partial u\left(\frac{w}{2}, y\right)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, u\left(x, \frac{h}{2}\right) + \xi_{u0} \frac{\partial u\left(x, \frac{h}{2}\right)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

式中: ξ_{u0} —速度滑移系数, $\xi_{u0} = \frac{2 - \sigma_u \lambda}{\sigma_u}$

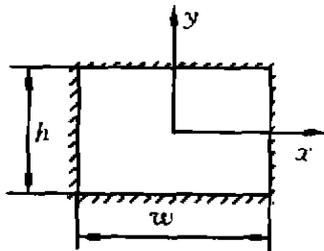


图1 求解速度场的坐标系

其中 σ_u 为动量协调系数,依赖于表面粗糙度、温度及气体种类等, λ 为分子平均自由程。取 h 为长度参考量,平均速度 \bar{u} 为速度参考量,则以上控制方程和边界条件可化为无量纲形式:

$$\frac{\partial^2 U(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U(X, Y)}{\partial Y^2} = \frac{h^2}{\mu \bar{u}} \frac{dp}{dz} \quad (6)$$

$$\frac{\partial U(0, Y)}{\partial X} = 0, U\left(\frac{w}{2h}, Y\right) + \xi_u \frac{\partial U\left(\frac{w}{2h}, Y\right)}{\partial X} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial U(X, 0)}{\partial Y} = 0, U\left(X, \frac{1}{2}\right) + \xi_u \frac{\partial U\left(X, \frac{1}{2}\right)}{\partial Y} = 0 \quad (8)$$

其中大写字母代表相应的无量纲量,且 $\xi_u = \xi_{u0}/h$ 。采用分离变量法求解方程(6)~(8),可得无量纲速度分布为:

$$U(X, Y) = \frac{4h^2 \left(\frac{dp}{dz}\right)}{\mu \bar{u}} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) \cos(\sqrt{\lambda_i} X)}{\lambda_i \left[\sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h}\right) + \frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h} \right]} \left[\frac{\text{ch}\sqrt{\lambda_i} Y}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right) + \xi_u \sqrt{\lambda_i} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)} - 1 \right] \right\} \quad (9)$$

其中 λ_i 是特征方程

$$\xi_u \sqrt{\lambda_i} \text{tg}\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) = 1 \quad (10)$$

的系列实根。

由平均速度的定义有:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \iint_A u(x, y) dx dy \quad (11)$$

(11)式两端同时除以 \bar{u} , 由于 $U = u/\bar{u}$, 则:

$$\frac{1}{A} \iint_A U(X, Y) dX dY = h^2 \quad (12)$$

由(9)和(12)可得:

$$\bar{u} = \frac{16h^3 \left(\frac{dp}{dz}\right)}{w\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right)}{\lambda_i^{\frac{3}{2}} \left[\sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h}\right) + \frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h} \right]} \left[\frac{\text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda_i} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right) + \xi_u \lambda_i \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (13)$$

把(13)代入(9)得:

$$U(X, Y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} E_i \cos(\sqrt{\lambda_i} X) \left[\frac{\text{ch}(\sqrt{\lambda_i} Y)}{F_i} - 1 \right] \quad (14)$$

其中:

$$D = \mu \bar{u} \left[4h^2 \left(\frac{dp}{dz}\right) \right]$$

$$E_i = \frac{\sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right)}{\lambda_i} \left[\sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h}\right) + \frac{w\sqrt{\lambda_i}}{h} \right]$$

$$F_i = \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right) + \xi_u \sqrt{\lambda_i} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)$$

1.2 温度场

在矩形槽道簇中,除了要考虑槽道底部的热流外,还要考虑由两侧面(肋片)导入的热流。但是,当槽道的高宽比很小时,由两侧面导入的热流与底面热流相比可以忽略,这时相当于只有底面加热,而其余三面绝热的情况。同时假定热边界层是充分发展的。

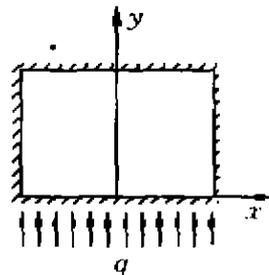


图2 求解温度场的坐标系

由图2和(2)式可列出能量方程及相应的边界条

件：

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2} = \frac{\rho c_p \bar{u}(x, y)}{\kappa} \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial T(0, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T\left(\frac{w}{2}, y, z\right)}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \xi_{T0} \frac{\partial T(x, 0, z)}{\partial y} &= T(x, 0, z) - T_w, \\ \frac{\partial T(x, h, z)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中(17)为一阶温度跳跃边界条件,由(2)式给出, ξ_{T0} 为温度跳跃系数,定义为:

$$\xi_{T0} = \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{2}{Pr} \right) \lambda \quad (18)$$

其中 σ_T 为热协调系数,与表面粗糙度、温度及气体种类等因素有关, γ 是气体的比热比。根据热充分发展的假定,取长为 δz 的一小段槽道做能量平衡分析:

$$\rho c_p \bar{u} h \bar{\omega} \delta T_b = \omega q \delta z \quad (19)$$

所以:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_b}{\partial z} \approx \frac{\delta T_b}{\delta z} = q / (\rho c_p \bar{u} h) \quad (20)$$

定义无量纲温度 $\theta(X, Y) = (T - T_w) / (h q / \kappa)$, 令 $\xi_T = \xi_{T0} / h$, 与(20)一同代入(15)~(17)得无量纲形式的能量方程:

$$\frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} = U(X, Y) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Y)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta\left(\frac{w}{2h}, Y\right)}{\partial X} = 0 \quad (22)$$

$$\theta(X, 0) = \xi_T \frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \theta(X, 1)}{\partial Y} = 0 \quad (23)$$

值得指出的是,定义无量纲温度时所用的参考温度 T_w 是加热面的壁温。严格地说, T_w 是沿槽宽方向变化的量,即 $T_w = T_w(x)$ 。事实上,当矩形槽道截面的高宽比 $\beta (= h/w)$ 比较小时,定热流加热面壁温由于受两绝热侧面的影响而产生的不均匀性也较小,忽略 $\partial T_w / \partial X$ 和 $\partial^2 T_w / \partial X^2$ 不会对温度场的分布产生较大影响。这样在无量纲形式的能量方程(21)中便略去了 $\partial T_w / \partial X$ 和 $\partial^2 T_w / \partial X^2$ 项。

利用已求得的速度分布(需作简单的坐标平移以适应图 2 的坐标系),求解式(21)~(23),可得到无量纲温度分布为:

$$\theta(X, Y) = -\xi_T + \frac{2h}{wD} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{E_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) \times \right.$$

$$\left. \left[\frac{\text{ch}\left(\sqrt{\lambda_i} Y - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right) - Y \sqrt{\lambda_i} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right) - \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)}{\lambda_i F_i} - \frac{1}{2} Y^2 + Y \right] \left[L_k(Y) - \frac{\sqrt{\varphi_k} L_k(0) \text{ch}\left(\sqrt{\varphi_k} Y - \sqrt{\varphi_k}\right) + P_k(1) \text{sh}\left(\sqrt{\varphi_k} Y\right)}{\sqrt{\varphi_k} \text{ch}\left(\sqrt{\varphi_k}\right)} \right] \cos\left(\sqrt{\varphi_k} X\right) \right] \quad (24)$$

其中:

$$L_k(Y) = (-1)^k \frac{4h}{wD} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_i \sqrt{\lambda_i} \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right)}{\lambda_i - \varphi_k}$$

$$\left[\frac{\text{ch}\left(\sqrt{\lambda_i} Y - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)}{F_i(\lambda_i - \varphi_k)} + \frac{1}{\varphi_k} \right]$$

$$P_k(Y) = \frac{d}{dY} L_k(Y) =$$

$$(-1)^k \frac{4h}{wD} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_i \lambda_i \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) \text{sh}\left(\sqrt{\lambda_i} Y - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)}{F_i(\lambda_i - \varphi_k)^2}$$

$$\varphi_k = \frac{4h^2 k^2 \pi^2}{w^2}$$

2 结果分析

由(13)可计算质量流量为:

$$m = \rho w h \bar{u} \quad (25)$$

由速度分布式(14)求得槽道任意截面上的平均摩擦切应力为:

$$\bar{\tau}_w = -\frac{4h^2}{w+h} \left(\frac{dp}{dz} \right) \sum_{i=1}^{\infty} E_i \sqrt{\lambda_i} \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) \quad (26)$$

因此阻力常数为:

$$f \cdot Re = \frac{8\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}^2} \frac{\rho \bar{u} D_h}{\mu} =$$

$$\frac{2wD_h}{h^2 \left(1 + \frac{w}{h}\right)} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} E_i \sqrt{\lambda_i} \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\frac{w\sqrt{\lambda_i}}{2h}\right) \left[\frac{\text{sh}\left(\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)}{\sqrt{\lambda_i} F_i} - \frac{1}{2} \right]} \quad (27)$$

Nusselt 数为:

$$Nu^* = \frac{aD_h}{\kappa} = -\frac{q}{T_b - T_w} \frac{D_h}{\kappa} = -\frac{D_h}{h\bar{\theta}} \quad (28)$$

其中 $\bar{\theta}$ 为平均无量纲温度,由下式给出:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{A} \iint_A U(X, Y) \theta(X, Y) dX dY \quad (29)$$

2.1 阻力特性

文献[2]指出,对于大多数气体与固体壁面的组合,动量协调系数 σ_u 和热协调系数 σ_T 分别在0.9~1.0与0.85~1.0的范围内,并且在该范围内它们的不同取值对阻力系数和换热系数的影响很小,因而以下计算中 σ_u 和 σ_T 均取为1.0。

图3示出了阻力常数 $f \cdot Re$ 随 Kn 数及槽道高宽比 $\beta (= h/w)$ 的变化关系。对于每一个特定的高宽比, $f \cdot Re$ 都随 Kn 数的增加而减小,并且都小于非滑移边界模型下的结果($Kn = 0$)。这与Harley等^[4]的实验结果是一致的。另外,由(24)式可以看出 $f \cdot Re$ 与 Re 数无关,而Harley等人的实验表明,当槽道很小时(即 Kn 数较大时) $f \cdot Re$ 将轻微依赖于 Re 数。很明显,高宽比为1时阻力常数最小。

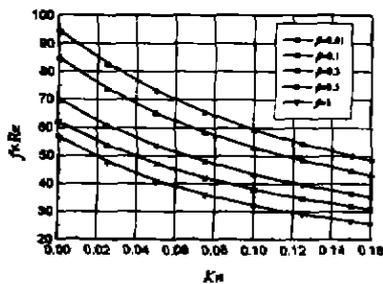
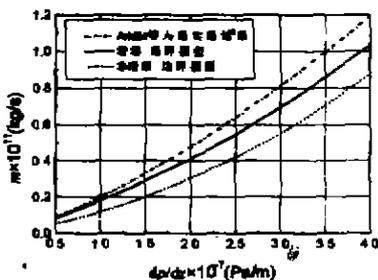


图3 阻力常数与槽道高宽比 β 及 Kn 数之间的变化关系

图4比较了相同的槽道高宽比下质量流量与压力梯度之间的变化关系的分析解和实验结果。从图中可以看出在相同的质量流量及其它条件下考虑了滑移边界条件后的流动阻力(与压力梯度成正比)比非滑移条件下的相应值小,但比Arkilic等^[5]的实验结果大,而且这一差值随流量的增加而增大。由于本文的滑移模型没有考虑气体的可压缩性影响,这表明可压缩性对气体在滑移区的流动有较大的影响。另外,文献[6]指出,如果采用二阶或更高阶的滑移边界条件,所得到的分析结果与实验之间的偏差将更小。这意味着如果用二阶滑移边界条件代替一阶滑移边界条件,图4中分析解和实验之间的偏差将有可能更小。



(槽道宽 52.25 μm ,高 1.33 μm ,长 7 500 μm 。

氮气,温度 314 K,出口压力 100 kPa)

图4 流量与压力梯度之间的关系

2.2 换热特性

图5和图6为氮气流动的Nusselt数分析结果。由图5可以看出, Nu 数随 Kn 数的变化趋势取决于槽道高宽比 β 。当 $\beta < 0.015$ 时, Nu 数随 Kn 数增加而增加;当 $\beta > 0.015$ 时, Nu 数则随 Kn 数增加而减小。Wu和Little在以氮气为工质的微槽($D_h = 50 \sim 80 \mu\text{m}$)换热实验中认为换热系数比理论值(非滑移边界模型)高。Sparrow^[3]指出,对于气体在圆管内的充分发展滑移流动,定热流和定壁温条件下的 Nu 数均低于非滑移模型的结果。在图5中,当 $\beta < 0.015$ 时,滑移模型的 Nu 数高于非滑移模型,当 $\beta > 0.015$ 时则相反。

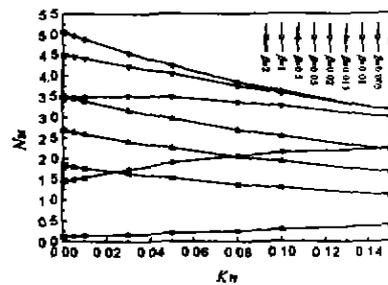


图5 Nusselt数与Knudsen数之间的变化关系

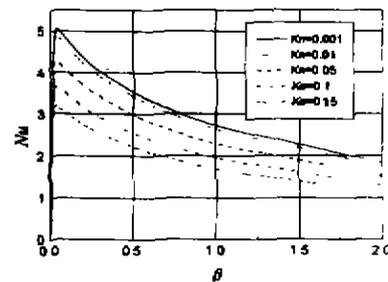


图6 Nusselt数与槽道高宽比 β 之间的变化关系

图6示出了Nusselt数与槽道高宽比 β 的变化关系。可以看出,在一定的 Kn 数下,有一最佳 β 值使 Nu 数达到最大。但该 β 值非常小,大约在0.04左右。

3 结论

1) 速度滑移和温度跳跃的边界条件与传统意义下的Navier-Stokes方程和能量方程相结合可以用来描述气体在速度滑移和温度跳跃区的流动和换热过程。考虑了滑移边界条件后的流动阻力与实验之间的偏差比非滑移模型下的相应偏差更小。

2) 槽道高宽比 β 对 Nu 数有很大影响。存在一最佳 β 值使 Nu 数取得最大值。当 $\beta < 0.015$ 时, Nu 数高于非滑移模型下的相应值,当 $\beta > 0.015$ 时则相反。

3) 可压缩性对气体在滑移区的流动和换热有较大影响。二阶或更高阶的滑移边界条件可能比一阶

滑移边界条件更接近真实物理情况,这有待进一步的研究。

符号表:

A —槽道截面积 $[m^2]$
 c_p —气体定压比热容 $[Jkg^{-1}K^{-1}]$
 D_h —槽道截面水力直径 $[m]$
 f —摩擦系数, $f = 2\tau_w/(\rho\bar{u}^2)$
 h —槽道截面高 $[m]$
 Kn —Knudsen数, $Kn = \lambda/h$
 m —质量流量 $[kgs^{-1}]$ Nu —Nusselt数
 p —压力 $[Pa]$ Pr —Prandtl数
 q —热流密度 $[Jm^{-2}s^{-1}]$
 Re —Reynolds数, $Re = \rho\bar{u}D_h/\mu$
 T —温度 $[K]$ T_w —加热面壁温 $[K]$
 T_h —流体混合平均温度 $[K]$
 \bar{u} —截面平均速度 $[ms^{-1}]$
 w —槽道截面宽 $[m]$
 x — x -坐标轴 y — y -坐标轴
 z — z -坐标轴,与流动方向一致
 β —槽道截面高宽比, $\beta = h/w$
 γ —气体比热比 θ —无量纲温度
 $\bar{\theta}$ —平均无量纲温度
 κ —气体导热系数 $[Jm^{-1}s^{-1}K^{-1}]$

λ —分子平均自由程 $[m]$
 μ —动力粘性系数 $[kgm^{-1}s^{-1}]$
 ξ_{T0} —温度跳跃系数 $[m]$
 ξ_{v0} —速度滑移系数 $[m]$
 ρ —气体密度 $[kgm^{-3}]$
 σ_T —热协调系数 σ_u —动量协调系数
 $\bar{\tau}_w$ —平均切应力 $[kgm^{-1}s^{-2}]$

参考文献:

- [1] 陈熙. 动力论及其在传热与流动研究中的应用[M]. 清华大学出版社, 北京, 1996.
- [2] SPARROW E M, LIN S H. Laminar Heat Transfer in Tubes under Slip-flow Conditions[J]. ASME, Journal of Heat Transfer, 1962, 84(4): 363-369.
- [3] BARRON R F, WANG X M, AMEEL T A, et al. The Graetz Problem Extended to Slip-Flow[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1997, 40(8): 1 817-1 823.
- [4] HARLEY J C, HUANG Y F, BAU H H, et al. Gas Flow in Micro-Channels[J]. J Fluid Mech, 1995, 284: 257-274.
- [5] ARKILIC E B, BREUER K S, SCHMIDT M A. Gaseous Flow in Microchannels[J]. Application of Microfabrication to Fluid Mechanics, ASME, 1994, FED-197: 57-66.
- [6] BESKOK A, KARNIADAKIS G E, TRIMMER W. Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows[J]. Journal of Fluids Engineering, ASME 1996, 118: 448-456.

Analysis of Gaseous Slip Flow and Heat Transfer in Micro Rectangular Channels

XIAO Rui, XIN Ming-dao, ZHU Xun

(Institute of Engineering Thermophysics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: This article present the theoretical analysis of gas flow and heat transfer in micro rectangular channels in the regime of velocity-slip and temperature-jump. The model is built on the assumption that the bottom wall of the channel is in uniform heat flux while the other three walls are adiabatic, and that the flow and heat transfer is of the hydraulic and thermal fully developed laminar flow of the incompressible fluid. Analytic solutions of the cross-section distributions of both the velocity and temperature are obtained. The friction and heat transfer performances are discussed. The agreement between analytic solutions and experimental results existed shows that in a definite extension of Knudsen number the traditional Navier-Stoks equations and energy equations with the boundary conditions of slip velocity and temperature jump can describe the gaseous flow and heat transfer mechanisms in micro rectangular channels.

Key words: micro rectangular channel; gas; velocity-slip; temperature-jump; theoretical analyses

(责任编辑 刘道芬)