

文章编号:1000-582x(2001)03-0068-04

# 时域有限差分法中的吸收边界条件与角点处理

李永明, 俞集辉, 黄 键

(重庆大学 电气工程学院, 重庆 400044)

**摘要:** 吸收边界条件是时域有限差分法(FDTD)中的一个重要部分,而吸收边界条件中角点的处理又对吸收边界条件本身影响甚大,角点处理的不恰当,可能导致完全不合逻辑的结果。传统二维二阶近似吸收边界条件中对角点的处理则比较复杂,且不易向三维情况推广。针对这种情况,文中基于单向行波吸收理论,讨论了一种简单易处理的角点处理方法,并设计了一数值试验方法进行了验证,计算结果表明这种方法满足对吸收边界条件所提出的各项要求并具有较高的计算精度。同时,这种角点处理方法也极易向三维情况推广。

**关键词:** 时域有限差分法; 吸收边界条件; 波动方程

**中图分类号:** TM 11

**文献标识码:** A

对于辐射、散射等许多开放电磁场问题,采用时域有限差分法来进行计算时,总是在某处把空间截断,使研究的空间为有限,以适应计算机的计算能力及有限存储量。这样,在空间的截断处就会出现非物理的电磁波反射,这将严重地影响计算结果的精确性。另外,时域有限差分法所用的中心差商形式的差分方程的计算也需要截断边界以外的场的信息,所以,需要一种截断边界网格点处场的特殊处理条件,即吸收边界条件(Absorbing Boundary Conditions),它的引入要求一方面能避免使用截断边界以外的场的信息,另一方面还能大大消除非物理因素引起的在截断边界处的波的反射,使在有限的空间模拟电磁波在无界空间的传播。

目前对吸收边界条件的比较系统和深入的研究,主要是沿着两个方向进行的,一是利用模零化微分算子来建立辐射边界条件<sup>[1]</sup>,二是通过波动方程的因子分解而获得单行波方程并取近似来建立吸收边界条件<sup>[2,3]</sup>。后者比较简单和实用,受到了极大的重视和广泛的应用。但波动方程的因子分解项含有根号部分,因而根号部分的近似成了问题的关键,传统的方法是Mur二阶吸收边界。同时传统吸收边界对角点的处理方法,形式较复杂,还可能导致不收敛。针对这些情况,本文将讨论一种既具有较高精度而又简单易

处理的吸收边界条件。

## 1 吸收边界条件

考虑波动方程

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi(x,t) = 0 \quad (1)$$

可分解成

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \varphi(x,t) = 0$$

它相当于两个单向波方程

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \varphi(x,t) = 0 \quad (2a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \varphi(x,t) = 0 \quad (2b)$$

易证方程(2a)(方程(2b))为沿  $x$  的负(正)方向传播的平面波  $\varphi(x,t) = f(x+vt)$  ( $\varphi(x,t) = f(x-vt)$ ) 垂直投射到平面左(右)边界上的精确吸收边界条件。

设  $\varphi(x,y,t)$  为二维问题的任一场分量,在无源区域( $x:0 \sim h, y:0 \sim H$  的矩形域)有波动方程

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi(x,y,t) = 0 \quad (3)$$

定义算子:  $L_2 = L_2^+ \cdot L_2^-$

• 收稿日期:2000-08-26

基金项目:国家自然科学基金(59777005)及高等学校博士学科点专项科研基金资助项目

作者简介:李永明(1964-),男,浙江宁波人,重庆大学博士。从事电工理论研究。

$$\begin{aligned}
 \text{其中} \quad L_2^+ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1-s^2} \\
 L_2^- &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1-s^2} \\
 s &= v \frac{\partial}{\partial y} / \frac{\partial}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4}$$

仿照上述一维波动方程问题中使用的方法,对二维波动方程算子进行因子分解,则可证<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned}
 L_2^- \varphi &= 0 \quad (x=0) \\
 L_2^+ \varphi &= 0 \quad (x=h)
 \end{aligned}$$

分别为边界  $x=0$ (左边界)和  $x=h$ (右边界)的精确吸收边界条件。

由于上述精确吸收边界条件算子中含有一个根号部分,应对根号部分作近似处理而成为能够直接进行数值计算的近似吸收边界条件。

对根号部分取二阶近似形式

$$\sqrt{1-s^2} \approx p_0 + p_2 s^2 \tag{5}$$

在边界  $x=0$  处,具有二阶近似的吸收边界条件为

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{p_0}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v p_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi = 0 \tag{6}$$

设  $\Delta x = \Delta y = 2v\Delta t$ ,利用中心差商,则得边界  $x=0$  上的场量计算格式

$$\varphi_{(0,j)}^{n+1} = \frac{1}{2p_0+1} A_1 - \frac{2p_0}{2p_0+1} A_2 - \frac{p_2}{4p_0+2} A_3 \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \varphi_{(0,j)}^{n+1} - \varphi_{(0,j)}^{n-1} + \varphi_{(0,j)}^{n-1} \\
 A_2 &= \varphi_{(1,j)}^{n+1} - 2\varphi_{(1,j)}^n - 2\varphi_{(0,j)}^n + \varphi_{(1,j)}^{n-1} + \varphi_{(0,j)}^{n-1} \\
 A_3 &= \varphi_{(1,j+1)}^n - 2\varphi_{(1,j)}^n + \varphi_{(1,j-1)}^n + \\
 &\quad \varphi_{(0,j+1)}^n + \varphi_{(0,j-1)}^n - 2\varphi_{(0,j)}^n
 \end{aligned} \tag{8}$$

当  $p_0=1, p_2=-0.5$  时,式(7)便是 Mur 二阶近似吸收边界条件。

对  $x=h$  边界和  $y=0, H$  边界的计算格式可类似地得到。

## 2 二维吸收边界条件中角点的处理

由式(7)和式(8)可知,当计算角点(0,0)处的场值  $\varphi_{(0,0)}^{n+1}$  时,需要知道  $\varphi_{(0,-1)}^n$  的值,而(0,-1)在计算网格空间外,这样  $\varphi_{(0,0)}^{n+1}$  不能被计算出。在其它角点也有类似的问题。

Taflove<sup>[4]</sup>给出了一种对角点的处理方法。即:假设所有到达点(0,0)的外行波都是从网格空间中心到点(0,0)的径向射线方向传播,并设区域内在径向射线上距点(0,0)一个网格步长  $\Delta s$  的外行波场值用  $\varphi_r$  表示,在满足条件  $\Delta s = 2v\Delta t$  下,角点上的场值与  $\varphi_r$

之间满足关系

$$\varphi_{(0,0)}^{n+1} = f_{\text{rad}} \varphi_r^{n-1}$$

其中  $f_{\text{rad}}$  为衰减因子,  $\varphi_r^{n+1}$  由下式插值而得( $\alpha$  为径向射线与  $x$  轴之间的夹角)

$$\begin{aligned}
 \varphi_r^{n+1} &= (1 - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha)\varphi_{(0,0)}^{n+1} + \\
 &\quad (1 - \sin\alpha)\cos\alpha\varphi_{(1,0)}^{n-1} + \sin\alpha(1 - \cos\alpha)\varphi_{(0,1)}^{n-1} + \\
 &\quad \sin\alpha\cos\alpha\varphi_{(1,1)}^{n-1}
 \end{aligned}$$

但这种角点处理方法计算复杂,向三维情况推广也困难。

我们设想,如果角点的处理也采用单向波的方式,即同样假设所有到点(0,0)的外行波都是从网格空间中心到点(0,0)的方向,则可得到由单向波导出的角点计算式:

$$\varphi_{(0,0)}^{n+1} = \varphi_{(1,1)}^n + \frac{v\Delta t \cdot \cos\alpha - \Delta s}{v\Delta t \cdot \cos\alpha + \Delta s} [\varphi_{(1,1)}^{n+1} - \varphi_{(0,0)}^n]$$

满足稳定性条件  $\Delta s = 2v\Delta t$  时为:

$$\varphi_{(0,0)}^{n+1} = \varphi_{(1,1)}^n + \frac{\cos\alpha - 2}{\cos\alpha + 2} [\varphi_{(1,1)}^{n+1} - \varphi_{(0,0)}^n]$$

## 3 吸收边界条件的数值验证

针对以上的二阶吸收边界条件和角点的处理方法,笔者设计了一种数值试验方法。设试验的方形空间的网格数为  $40 \times 40$ , 在其中的点(11,11)处设置一 Gauss 线型 TM 脉冲源(见图 1), 试验的空间边界即是要考查的吸收边界条件。

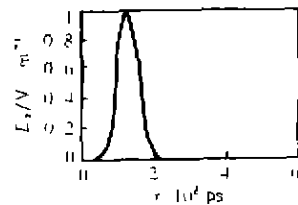


图 1 试验波形

Gauss 脉冲为

$$E_z = \exp[-(t - t_0)^2 / T^2]$$

$$t_0 = 129.0 \text{ ps}, T = 37.48 \text{ ps}$$

网格尺寸:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta s = 2.54 \times 10^{-5} \text{ m}, \Delta t = \Delta s / (2v)$$

取具有代表性的两个边界点:角点(0,0)和边界点(11,0),及分别关于源点的对称点(22,22), (11,22),其时域计算结果分别示于图 2—图 5 中。图 6—图 9 给出了不同时刻所考虑问题区域的场量分布值。

在二维自由空间给定一激发源,它是向四周均匀传播的,对于理想的吸收边界是不应该有反射波的,不当的边界条件引起的反射都会导致波形的变形。若用

Taflove 法处理角点则在边界上及角点有较大的反射波(图 2,3,9),且有计算不稳定的现象发生(图 2, Mur 边界条件);而用本文方法处理角点(图 4,5)则几乎没有反射波,也没有计算不稳定的现象发生,并且场值关

于源点((11,11)) 对称(图 6,7),波形和波峰都接近一致,这说明具有二阶精度的吸收边界条件的使用必须与边界上角点的处理方式结合起来,才能达到较理想的结果。

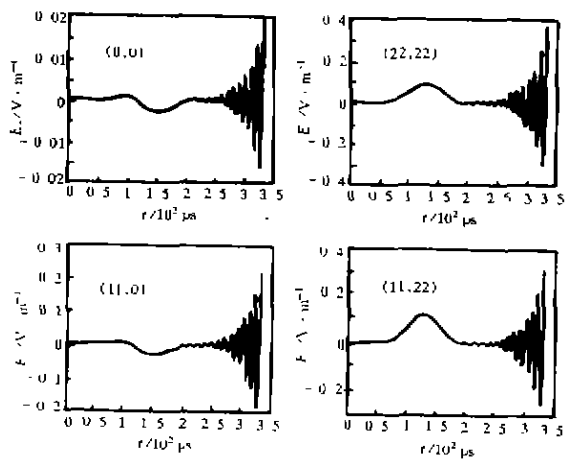


图 2  $p_0 = 1, p_2 = -0.5$  时, Taflove 角点法

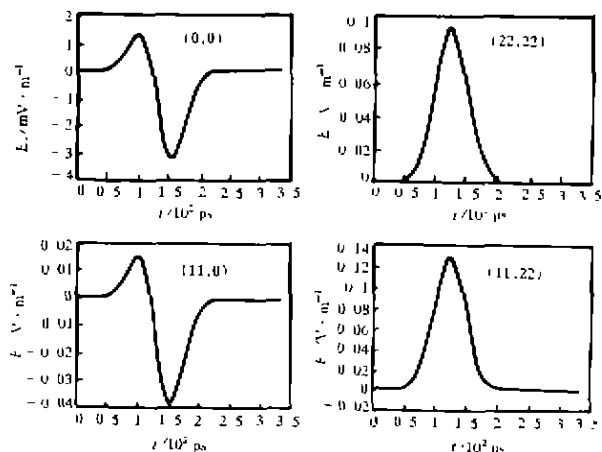


图 3  $p_0 = 1, p_2 = -0.3$  时, Taflove 角点法

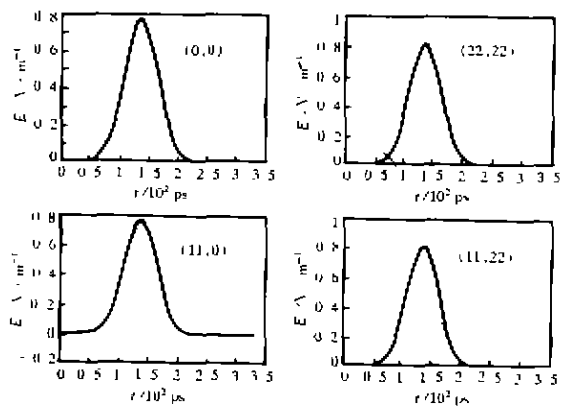


图 4  $p_0 = 1, p_2 = -0.5$  时, 本文角点处理法

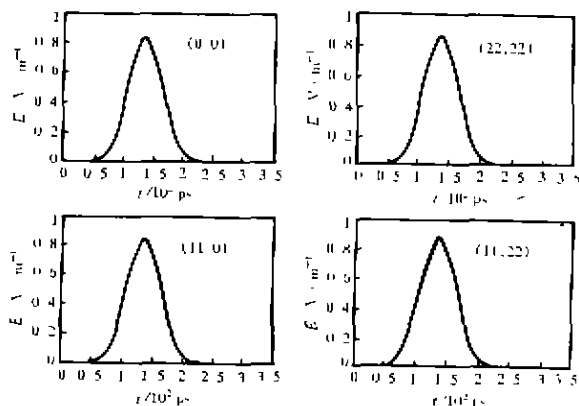


图 5  $p_0 = 1, p_2 = -0.3$  时, 本文角点处理法

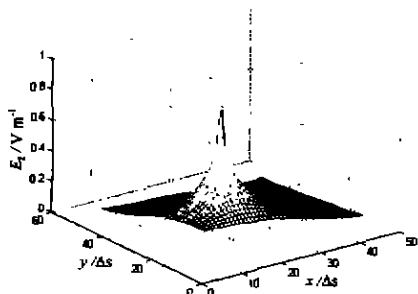


图 6 300 个时间步时刻的电场分布图, 本文法

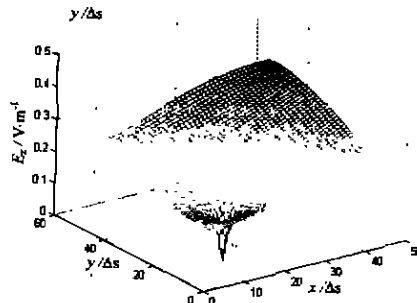


图 7 500 个时间步时刻的电场分布图, 本文法

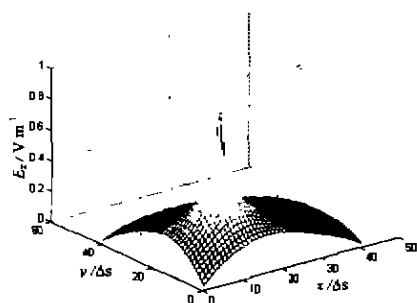


图8 300个时间步时刻的电场分布图, Taflove法

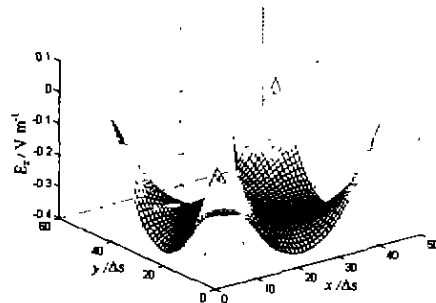


图9 500个时间步时刻的电场分布图, Taflove法

#### 4 结论

由以上的计算和分析可知, 本文中对边界角点的处理方法是可行和有效的, 特别是当散射体由各向异性材料组成时, 用这种方法处理由材料各向异性所引起的复杂边界条件, 具有十分的便利之处, 同时, 用本文中处理角点的方式可很容易地向三维形式的棱边处理进行推广。

#### 参考文献:

[1] 王长清. 电磁场计算中的时域有限差分法[M]. 北京: 北

京大学出版社, 1994.

- [2] ENGQUIST B. Absorbing boundary Conditions for the Numerical Simulation of Wave[J]. Mathematics of the Computation, 1977, 31(139):629-651.
- [3] MUR G. Absorbing boundary Conditions for the finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1981, MTT-29(10):1 073-1 077.
- [4] TAFLOVE A. User's Code for FD-TD Final Report RADC-TR-82-16 by IIT Research Institute[R] Chicago; IL to Rome Air Development Center. Griffiss AFB, New York, On Contract F30602-80-C-0302, Feb, 1982.

## The Corner Point Processing and Absorbing Boundary Conditions in Finite-Difference Time-Domain

LI Yong-ming, YU Ji-hui, HUANG Jian

(College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** ABC(Absorbing Boundary Conditions) is an important component part in FDTD(Finite-Difference Time-Domain) method, the processing of corner point affect ABC itself, that is, the inadequate processing of them may cause unnaturally results. The processing of corner points in traditional second-order absorbing boundary condition for 2D case is complex, and it is difficult to extend to 3D case. For these reasons, a simpler method about the corner points based on unidirectional out traveling wave absorbing theorem is discussed in this paper, and validated by a numerical method proposed by authors. The results show that this method satisfies the demands for ABC and is more efficient and more precise. Meanwhile, it is easy to extent to 3D case.

**Key words:** finite-difference time-domain; absorbing boundary conditions; wave equation

(责任编辑 李胜春)