

文章编号:1000-582x(2001)04-0001-04

# 空泡运动非线性动力学特性的数值研究<sup>\*</sup>

张风华<sup>1</sup>, 廖振方<sup>2</sup>, 唐川林<sup>1</sup>

(1. 株洲工学院, 湖南株洲 412008; 2. 重庆大学 机械工程学院, 重庆 400044)

**摘要:**在考虑了液体可压缩性的影响后,对空泡径向运动的非线性动力学特性进行了数值研究,结果表明空泡运动呈现强烈的非线性动力学特性,倍周期分岔是空泡运动达到混沌的途径之一。揭示了空泡运动规律所具有的不确定性。

**关键词:**非线性动力学;空泡运动;数值研究;分岔;混沌

**中图分类号:**O358

**文献标识码:**A

空化水射流是一种新型高效的水射流,以其高效、比能低、改善工作环境等独特优点被应用到清洗、破碎和石油钻井中<sup>[1]</sup>,取得了明显的经济和社会效益。目前,对空化水射流的研究主要集中在空化水射流的发生装置、破碎机理、冲蚀能力等方面,而对空化水射流中空泡生长的动力学特性,特别是非线性动力学特性的研究很少。淹没空化水射流中的空泡是在振荡压力场中初生和长大的,研究在振荡压力场中空泡的非线性动力学特性具有重要的理论与实际意义。然而非线性问题的研究尚在发展之中,对于一般的非线性方程还缺乏普遍的计算方法,因而数值模拟便成为研究这类问题的主要手段之一。

## 1 动力学方程

在考虑了液体可压缩性时单个球形泡的动力学方程用 Keller 形式<sup>[2]</sup>的 Rayleigh - Plesset 方程描述:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}}{c}\right) \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\dot{R}}{c} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt}\right) \left(p_v + p_g - p(t) - \frac{2S}{R} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R}\right) \quad (1)$$

式中  $c$ :水中声速  
 $R$ :空泡半径  
 $\rho$ :液体密度  
 $p_g$ :空泡内气体分压  
 $p_v$ :液体的饱和蒸汽压

$S$ :表面张力系数

$\mu$ :液体动力粘性系数

$p(t)$ :流场压力

字母上方的“·”表示  $\frac{d}{dt}$  (下同)

现假定泡内气体在空泡半径变化过程中经历绝热过程,则

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \quad (2)$$

式中  $R_0$ :初始时刻空泡半径

$V_0$ :初始时刻空泡体积

$p_{g0}$ :初始时刻空泡内气体分压

$\gamma$ :气体绝热指数

流场中振荡压力设为:

$$p(t) = p_0 + p_1 \sin(2\pi ft) \quad (3)$$

式中  $p_0$ :流场平均压力

$p_1$ :振荡压力幅值

$f$ :振荡频率

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{R_0} \\ y &= \frac{K_0}{R_0} \dot{R} \\ z &= \frac{t}{K_0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

\* 收稿日期:2001-02-01

基金项目:国家自然科学基金资助(59874033)。

作者简介:张风华(1960-),男,云南弥勒人,博士,副教授,研究方向:水射流理论及应用。

其中 
$$K_0 = R_0 \sqrt{\frac{\rho R_0}{2S}} \quad (5)$$

若记  $\tau = \frac{t}{K_0}$ , 则方程(1)、(2)、(3)可化为三维自治系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g(x, y, z) &= \frac{1}{(1 - a_1 y)x + a_1 a_2 a_3} \\ & (A + B + C) \\ A &= -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} a_1\right) y^2 \\ B &= a_2 (1 + a_1 y) [x^{-3\gamma} + a_3 - \\ & a_4 x^{-1} - a_5 y x^{-1} - a_6 (1 + a_7 \sin a_8 z)] \\ C &= a_1 a_2 x [a_4 y x^{-2} + a_5 y^2 x^{-2} - \\ & 3\gamma y x^{-3\gamma-1} - a_6 a_7 a_8 \cos(a_8 z)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

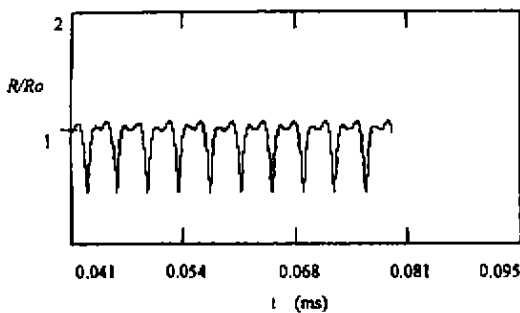
式中各系数为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{R_0}{cK_0}, a_2 = \frac{K_0^2 p_{g0}}{\rho R_0^2}, a_3 = \frac{p_v}{p_{g0}}, a_4 = \frac{2S}{p_{g0} R_0} \\ a_5 &= \frac{4\mu}{p_{g0} K_0}, a_6 = \frac{p_0}{p_{g0}}, a_7 = \frac{p_1}{p_0}, a_8 = 2\pi f K_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

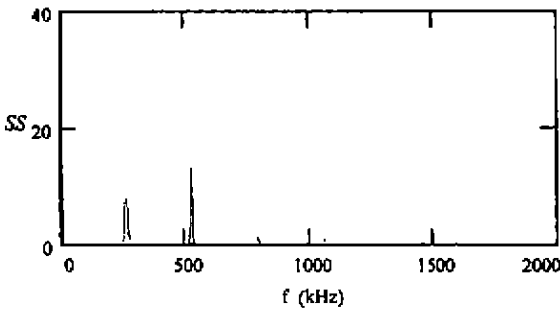
微分方程组(6)无解析解, 只能用数值方法求解。以振荡频率  $f$  为参量, 选取参数  $R_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $p_0 = 0.1\text{MPa}$ ,  $p_1 = 0.09\text{MPa}$ , 采用标准四阶 Runge-Kutta 方法<sup>[3,4]</sup> 求解。

### 2 拟线性响应

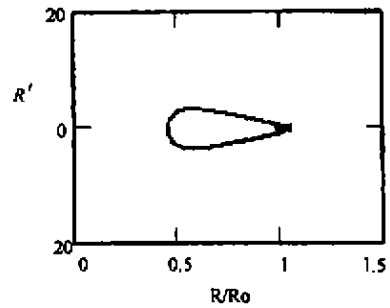
当振荡频率  $f = 265\text{kHz}$  时, 方程(6)的解如图1所示。图1(a)是泡半径比  $R/R_0$  与时间  $t$  之间的关系(只截取了其中的一段), 图1(b)则是这种变化在频域上的表示。可以看出, 与线性振荡不同的是除了基频外, 还有更高的频率分量, 因此我们称其为拟线性响应。图1(c)为相平面图, 表示  $R$  (即  $R'$ ) 与  $R/R_0$  之间的关系, 图1(d)则为相平面中的 Poicare (庞加莱) 图。可见在拟线性振荡下相图具有极限环特征, 而在 Poicare 图上仅一点, 故称为周期1解。



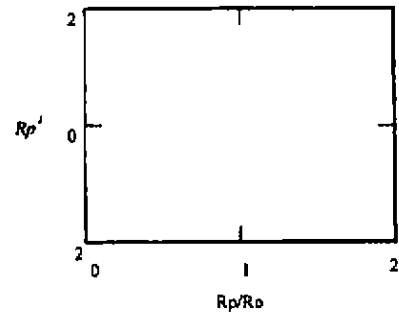
(a)



(b)



(c)



(d)

图1 拟周期振荡——周期1解 ( $f = 265\text{kHz}$ )

### 3 倍周期分岔

随着频率  $f$  的降低,方程(6)解的形式开始发生变化。

当  $f = 250\text{kHz}$  时出现的周期 2 解,在 Poincare 相图上为 2 个点,谱图上出现了次谐波,即低于  $f$  的频率分量,说明已经出现混沌的前兆。周期 2 解时的次谐波仅为  $f/2$ 。

当频率  $f$  进一步降低至  $f = 240\text{kHz}$  时会出现更多的次谐波,周期再次倍化为周期 4 解。

### 4 混沌

在出现周期 4 解之后,进一步降低振荡压力场频

率  $f$ ,出现了不太明显的周期 8 解。然后数值结果便很难找到周期性的规律,说明混沌到来了。

图 2 表示了在  $f = 233\text{kHz}$  时空泡处于混沌振荡时的情形。振荡已无周期可循,其频谱不再是线谱,而呈宽带噪声特性,图中的相平面也不再是极限环形式,而成为永不封闭的迹线,图中只画出了部分,否则将一团黑,分不出轨迹。Poincare 相图将由无穷多点组成,图中的 Poincare 相图只取了 200 个点,已显露出奇怪吸引子(Strange Attractor)的形状。

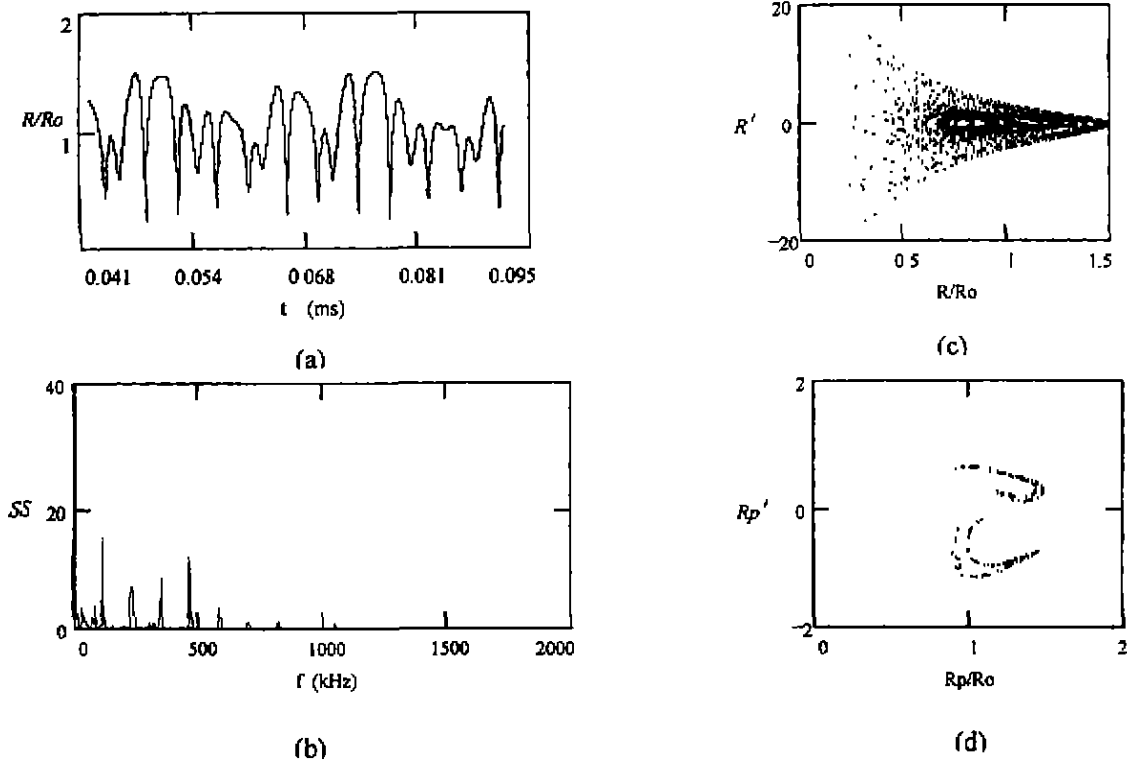


图 2 空泡的混沌运动( $f = 233\text{kHz}$ )

### 5 分岔图

图 3 是一张随参量振荡压力场频率  $f$  变化的分岔图。纵坐标为 Poincare 截面上空泡半径的无因次量,横坐标为参量  $f$ 。从图中可看出当频率  $f$  由  $270\text{kHz}$  逐渐减小时,有明显的由倍周期分岔到达混沌的现象。

混沌理论已经证明<sup>[5]</sup>,倍周期分岔到达混沌时应遵循 Feigenbaum 规律,即当  $n \rightarrow \infty$  时,参量  $\lambda$  应满足

$$\delta = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \Big|_{n \rightarrow \infty} = 4.6692016 \quad (9)$$

$\delta = 4.6692016$  称为 Feigenbaum 数。

从图 3 所示的倍周期分岔过程可以得到:从周期 1 到周期 2 的分岔点约在  $f_0 = 258.934\text{kHz}$ ,从周期 2 到周期 4 的分岔点约在  $f_2 = 241.3\text{kHz}$ ,从周期 4 到周期 8 的分岔点约在  $f_3 = 237.35\text{kHz}$ 。所以有

$$\frac{f_2 - f_1}{f_3 - f_2} = 4.4643 \approx \delta \quad (10)$$

即参量  $f$  的增量比约等于 Feigenbaum 数。其误差主要来自数值模拟中,分岔图上对应于横坐标的每个点

均是单独计算的,  $f_n$  的取值不可避免地存在误差。

通过以上的数值研究结果可知, 空泡壁的径向运动具有强非线性动力学特性, 在一定的条件下会出现

混沌现象, 倍周期分岔是单个空泡在振荡压力场中的运动达到混沌的途径之一, 从而揭示了空泡运动规律具有的内在不确定性。

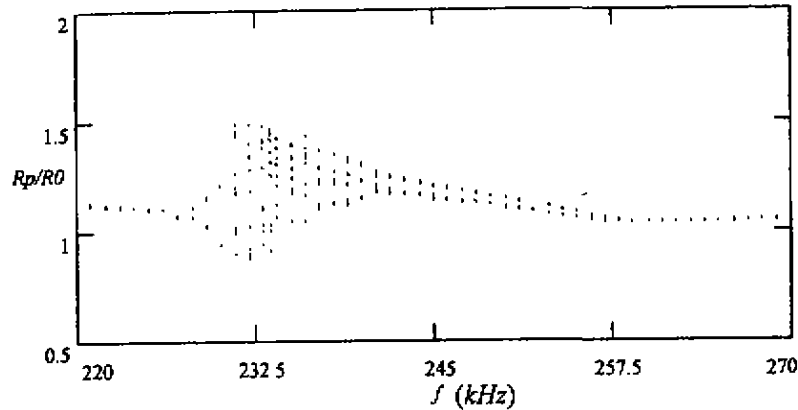


图3 空泡随振荡频率  $f$  变化的分岔图

#### 参考文献:

- |   |   |
|---|---|
| [1] 唐川林等, 石油钻井钻头用自激振荡喷嘴的研究[J], 石油学报, 1993, 1; pp 32-37.   | [3] 武汉大学, 计算方法[M], 北京: 高等教育出版社, 1984.                                 |
| [2] Keller, J. B. and Kolodner, I., Damping of Under Water Bubble Oscillations[J], Appl. Phys. 1956, 27; pp. 87-93. | [4] 纪哲锐, MathCAD PLUS 6.0 快速入门及应用[M], 北京: 清华大学出版社, 1998.              |
|   | [5] Moon, F. C., Chaotic Vibration[M], John Wiley & Sons, Inc., 1987. |

## Numerical Investigation of Nonlinear Dynamics of Cavitation Bubble Motion

ZHANG Feng-hua<sup>1</sup>, LIAO Zhen-fang<sup>2</sup>, TANG Chuan-lin<sup>1</sup>

(1. Zhuzhou Institute of Technology, Hunan zhuzhou, 412008;

2. College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing, 400044)

**Abstract:** The nonlinear dynamic equation of cavitation bubble radial motion has been investigated numerically after accounting for the liquid compressibility. It is shown that the bubble motion presents the intense feature of nonlinear dynamics and the period-doubling bifurcation is one of the routes to chaos. The indetermination of the cavitation bubble motion is revealed.

**Key words:** nonlinear dynamics; cavitation bubble motion; numerical investigation; bifurcation; chaos;

(责任编辑 成孝义)