文章编号:1000-582x(2001)04-0081-05

多孔硅橡胶的超弹性本构关系及其有限元方法*

励凌峰[1],刘占芳[1],胡文军[2],李思平[3]

(1.重庆大学 工程力学系,重庆 400044;2.中国工程物理研究院 结构力学研究所,绵阳 621900;
3.广东省 水利水电科学研究所,广州 510000)

摘　要:针对可压的泡沫硅橡胶材料,基于应变能密度函数可解耦为相对独立的等容变形和体积变形两部分,提出了泡沫硅橡胶材料的应变能密度函数,给出了材料的本构关系。并根据虚功原理,利用完全的 Lagrange 格式进行有限元分析,推导了有限变形的增量形式,获得了有限变形下的非线性有限元列式,编制了刚度矩阵的计算模块。它可以推广并用于任意的几何非线性和材料非线性的可压超弹性材料的力学性能分析。

关键词:可压超弹性;多孔硅橡胶;有限元格式

中图分类号:O343.5　　　　**文献标识码**:A

橡胶类材料具有许多优异的力学特性,能够缓和冲击、耐磨、减振等,它广泛用于重要设备的防护及结构内部的填充等。泡沫硅橡胶作为一种新型的高分子材料,它是根据特殊的发泡工艺制作而成,是一种比重小、成孔容易的多孔可压橡胶材料,由于其良好的力学特性,近年来已被工业和国防建设所采用,具有巨大的应用前景。

关于多孔隙的橡胶类材料,文献中对其力学性能进行了一定的研究,并提出了一些可以描述其力学行为的细观结构模型和广泛适用的热力学宏观模型。由于这些模型大都是经验型的,其本构关系普遍存在形式复杂、参数繁多且部分参数难以确定的缺陷。Mooney 基于描述变形特征的应变能函数,提出了针对不可压情况下的 Mooney 型橡胶本构关系[1],得到广泛的应用,但该本构关系在描述橡胶材料的大变形时与实验有很大偏差,Yeoh[2] 根据大量实验建议了一类新的本构关系,该本构关系与橡胶材料的大变形实验数据吻合较好。同时,为克服材料不可压在非线性数值模拟中的体积闭锁现象以及克服材料不可压假定所带来的本构约束,Blatz 和 Ko[3] 提出了针对近不可压橡胶类材料的本构关系。然而,对于既存在材料可压缩性又含有多孔结构的橡胶类材料,关于其应变能函数的形式和本构关系以及它的有限元形式的推导迄今尚未获得普遍承认的研究成果。

作者基于应变能密度函数可解耦为相对独立的等容变形和体积变形两部分,提出了可压多孔橡胶材料的应变能密度函数,给出了材料的本构关系。并根据虚功原理,利用完全的 Lagrange 格式进行有限元的分析,推导了泡沫硅橡胶的有限变形的增量形式,导出了详细的有限元列式。它可以推广并用于任意的几何非线性和材料非线性的可压超弹性材料的力学性能分析。

1　基本方程

1.1　几何描述

任意的弹性体,变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 定义为:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$$

它描述了从 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 物体形状的变化。对于任何 $\det\boldsymbol{F} \neq 0$ 的张量 $\boldsymbol{F}$,可通过极分解把变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 分解为:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为正交张量,代表纯转动;$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为对称正定张量,代表纯粹的变形。在有限变形情况下,通常用右和左 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来描述物体的变形:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F},\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^T \tag{3}$$

* 收稿日期:2000-09-19
基金项目:中国工程物理研究院科学技术基金资助项目(99030416)
作者简介:励凌峰(1976-),男,重庆市人,硕士。主要研究方向:计算固体力学。

并且，张量 U 和 V 的特征值 λ_i 被称做主方向线元的伸长比。因此，单元体在变形过程中体积的变化可由变形梯度 F 的雅可比行列式 J 表示为 $\mathrm{d}v = J\mathrm{d}V$。而且右和左 Cauchy-Green 应变张量 C 和 B 的主不变量可以定义为：

$$I_1 = tr(C), I_2 = \frac{1}{2}[I_1^2 - tr(C^2)], I_3 = J^2 = \det(C) \quad (4)$$

应变张量 C 和 B 的特征值分别可表示为相应的伸长比的平方，所以 C 或 B 的不变量可由 λ_i 表示为：

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2, I_2 = \prod_{i=1}^{3}\lambda_i^2\lambda_j^2(\forall_i \neq j), I_3 = \prod_{i=1}^{3}\lambda_i^2 \quad (5)$$

Green 应变张量 E 定义为：

$$E = \frac{1}{2}(C - 1) \Leftrightarrow E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}) \quad (6)$$

式中 δ_{KL} 代表 Kronecker 符号。

1.2 本构关系

橡胶类材料通常作为超弹性体进行处理，并归结为 Cauchy 弹性问题。在等温条件下以及只考虑纯力学过程，进一步把介质模型化为各向同性物质，因此应变能密度函数是右变形张量 C 的函数，也是左变形张量 B 的同一函数。这个函数可以表示为(B 或 C)的不变量的函数或者表达为伸长比的函数，因此单位体积的应变能密度函数可以表示为：

$$W = W(I_1, I_2, J = I_3^{1/2}) \text{ 或 } W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (7)$$

若应变能函数表示 $W = W(I_1, I_2, J = I_3^{1/2})$，第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 S 与应变能函数 W 的关系[4]：

$$S = \partial W/\partial E = 2(\partial W/\partial C) = 2\left\{\frac{\partial W}{\partial I_1}1 + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1 1 - C) + \frac{\partial W}{\partial I_3}(I_2 1 - I_1 C + C^2)\right\} \quad (8)$$

利用第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 S 与 Cauchy 应力张量 σ 的关系 $\sigma = J^{-1}(FSF^T)$ 可得 Cauchy 应力张量 σ 的分量表达式：

$$\sigma_{ij} = 2j\frac{\partial W}{\partial B_{KL}}x_{k,K}x_{l,L} = a_0\delta_{kl} + a_1 B_{kl} + a_2 B_{km}B_{ml} \quad (9)$$

上式中：

$$a_0 = 2jI_3\frac{\partial W}{\partial I_3}, a_1 = 2j\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right), a_2 = -2j\frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (10)$$

当应变能密度函数取 $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 时，Cauchy 应力张量的主应力与应变能函数的关系表示为：

$$\sigma_i = \lambda_i\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

因此，描述橡胶类材料的非线性弹性行为，必须提出适合的有限应变下的应变能密度函数。

2 可压多孔泡沫硅橡胶材料的应变能函数

作者研究的对象是可压泡沫多孔硅橡胶(硅泡沫)材料，可作为可压超弹性体进行处理。而且可压超弹性材料的变形可看作是由等容变形部分和体积变形部分的叠加，利用不可压条件，可以得到等容变形部分的伸长比为：

$$\hat{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}}\lambda_i \quad (12)$$

借助等容条件，有 $\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 = 1$。可压超弹性体的应变能密度函数可以分解为等容变形 $\bar{W}$ 和体积变形 $\tilde{W}$ 两部分：

$$W = \bar{W}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_1^{-1}\hat{\lambda}_2^{-1}) + \tilde{W}(J) \quad (13)$$

对于弹性开孔硅橡胶材料，在载荷作用下首先孔壁产生弯曲变形，当胞孔完全塌陷后，则承受载荷的是基体材料，因此孔隙度的高低对于多孔硅橡胶材料的压缩性能有重要的影响。作者根据单轴压缩实验和孔隙度对应力应主为关系的影响，提出了反映体积变形与孔隙度关系的体积应变能密度函数：

$$\tilde{W}(J) = D(1 + (1 - n_f)^{\frac{1}{2}})^2 (1 - n_f)E_s(J - 1)\ln J, D > 0 \quad (14)$$

式中 n_f 表示初始孔隙度，E_s 为橡胶基体材料的弹性模量。D 为材料常数，反映了可压情况下孔隙变形导致的体积改变对应变能密度函数的贡献，其值可由实验数据拟和而得。由方程(14)，可以得到橡胶材料的体积模量 K 与体积变形 J 和孔隙度的关系：

$$K = \partial_{JJ}^2\tilde{W}\mid_{J\to 1} = D(1 + (1 - n_f)E_s(J^{-2} + J^{-1})\mid_{J\to 1} \quad (15)$$

由上式可看出，体积模量随孔隙度的增大而降低，抗体积变形能力随压缩变形的增大而增加，这与压缩实验的测量是一致的。

对于等容变形部分，作者采用 Ogden 的不可压应变能函数和式(12)，得：

$$\bar{W}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) = \sum_{n=1}^{2} a_n(\hat{\lambda}_1^{B_n} + \hat{\lambda}_2^{B_n} + \hat{\lambda}_3^{B_n} - 3) \quad (16)$$

式中 a_n、B_n 是由实验确定的材料参数，其中 B_n 的值控制了变形曲线的形状。对于孔隙度大于 50% 的硅橡胶材料，可取 $B_{1,2} = 2, -2$，因此，根据表达式(13)、(14)

以及(16)可以得到多孔硅橡胶材料的应变能密度函数：

$$W = a_1(\hat{\lambda}_1^2+\hat{\lambda}_2^2+\hat{\lambda}_3^2-3)+a_2(\hat{\lambda}_1^{-2}+\hat{\lambda}_2^{-2}+\hat{\lambda}_3^{-2}-3)+D(1+(1-n_f)^{\frac{1}{2}})^2(1-n_f)E_s(J-1)\ln J \tag{17}$$

显然，多孔硅橡胶的应变能函数包含 3 个附加的材料参数，其中 a_1 和 a_2 用于刻画材料在等容情况下的剪切变形的影响，而 D 则描述了依赖于孔隙改变的纯体积变形对应变能函数的影响。

3　有限元列式

根据虚功原理，外力在虚位移上所作的虚功等于内力在虚应变上所作的虚功[5-8]，即物体的平衡方程变分形式取为 $\delta U^{ext}=\delta U^{int}$。作者采用全拉格朗日格式，即应力和应变张量是定义在初始时刻的位形上，因此内能可表述为：

$$U^{int}=\int_{R_x}S_{ij}E_{ij}dR_x \tag{18}$$

式中的 S_{ij} 和 E_{ij} 为上节所定义的 Piola-Kirchhoff 应力张量和拉格朗日应变张量，R_x 为变形前的体积，位移用增量形式，所以有：

$$\Delta(\delta U^{int})=\int_{R_x}\frac{\partial\delta u_i}{\partial X_j}T_{ijkl}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial X_l}dR_x+\int_{R_x}\left[\frac{1}{2}\left(F_{pi}\frac{\partial\delta u_p}{\partial X_j}+F_{pj}\frac{\partial\delta u_p}{\partial X_i}\right)\right]C_{ijkl}\times\int_{R_x}\left[\frac{1}{2}\left(F_{qk}\frac{\partial\Delta\delta u_q}{\partial X_l}+F_{ql}\frac{\partial\Delta\delta u_q}{\partial X_k}\right)\right]dR_x \tag{19}$$

其中 T_{ijkl} 和 C_{ijkl} 分别为初应力张量和材料张量，并且

$$T_{ijkl}=\delta_{ik}S_{jl}=\delta_{ik}\frac{\partial W}{\partial E_{jl}}=B_{jp}B_{pl}\delta_{ik}+2\left\{\frac{\partial W}{\partial I_1}\delta_{ik}\delta_{jl}+\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\delta_{ik}\delta_{jl}-B_{jl}\delta_{ik})+\frac{\partial W}{\partial I_3}(I_2\delta_{ik}\delta_{jl}-I_1B_{jl}\delta_{ik})\right\} \tag{20}$$

$$C_{ijkl}=\frac{\partial^2W}{\partial E_{ij}\partial E_{kl}}=2\frac{\partial S_{ij}}{\partial B_{kl}}=2\left\{\frac{\partial^2W}{\partial I_1^2}\delta_{kl}\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial I_2}(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{ik}\delta_{jl})+\frac{\partial^2W}{\partial I_2^2}(I_1\delta_{kl}-B_{kl})(I_1\delta_{ij}-B_{ij}+\frac{\partial^2W}{\partial I_3^2}(I_2\delta_{kl}-I_1B_{kl}+B_{kq}B_{ql})(I_2\delta_{ij}-I_1B_{ij}+B_{ip}B_{pj})+\frac{\partial W}{\partial I_3}(I_1\delta_{kl}\delta_{ij}-B_{kl}\delta_{ij}-I_1\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{kl}B_{ij}+\delta_{ik}\delta_{pl}B_{pj}+B_{ip}\delta_{pk}\delta_{jl})\right\} \tag{21}$$

外力的虚功部分表示为

$$\delta U^{ext}=\int_{R_x}R^{ext}\delta u\,dR_x \tag{22}$$

因此，通过离散积分区域和引进形函数可得增量位移形式的有限元方程：

$$[K^{tan}]\{\Delta d\}=\{R^{ext}\}_n-\{f^{int}\}_n \tag{23}$$

其中 n 为载荷的分级数，$\{R^{ext}\}$ 和 $\{f^{int}\}$ 为外力和内力矢量，$[K^{tan}]$ 是包括了几何相应部分 $[K_G]$ 和材料相应部分 $[K_M]$ 的切线刚度矩阵，它可写为：

$$[K^{tan}]=[K_G]+[K_M] \tag{24}$$

$$[K_G]=\int_{R_x}[B_G]^T[T][B_G]dR_x \tag{25}$$

$$[K_M]=\int_{R_x}[B_M]^T[C][B_M]dR_x \tag{26}$$

对于可压泡沫硅橡胶三维单元，联立方程(18－26)可得切线刚度矩阵的具体形式。

3.1　线性应变—位移转换矩阵

$$B_G={}_0^tB_{L0}+{}_0^tB_{L1} \tag{27}$$

$${}_0^tB_{L0}=\begin{bmatrix} {}_0N_{1,1} & 0 & 0 & {}_0N_{2,1} & \cdots & 0\\ 0 & {}_0N_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & {}_0N_{1,3} & 0 & \cdots & {}_0N_{n,3}\\ {}_0N_{1,2} & {}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,2} & \cdots & 0\cdots\\ 0 & {}_0N_{1,3} & {}_0N_{1,2} & 0 & \cdots & {}_0N_{n,2}\\ {}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{1,1} & {}_0N_{2,3} & \cdots & {}_0N_{n,1}\end{bmatrix}$$

其中：

$${}_0N_{k,j}=\frac{\partial N_k}{\partial^0x_j},\ u_j^k={}^{t+\Delta t}u_j^k-{}^tu_j^k,\ {}^0\bar{x}_1=\sum_{k=1}^nN_k{}^0x_1^k$$

$${}_0^tB_{L1}=\begin{bmatrix} L_{11}\ {}_0N_{1,1} & L_{21}\ {}_0N_{1,1} & L_{31}\ {}_0N_{1,1} & \cdots & L_{31}\ {}_0N_{n,1}\\ L_{12}\ {}_0N_{1,2} & L_{22}\ {}_0N_{1,2} & L_{32}\ {}_0N_{1,2} & \cdots & L_{32}\ {}_0N_{n,2}\\ L_{13}\ {}_0N_{1,3} & L_{23}\ {}_0N_{1,3} & L_{33}\ {}_0N_{1,3} & \cdots & L_{33}\ {}_0N_{n,3}\\ L_{11}\ {}_0N_{1,2}+L_{12}\ {}_0N_{1,1} & L_{21}\ {}_0N_{1,2}+L_{22}\ {}_0N_{1,1} & L_{31}\ {}_0N_{1,2}+L_{32}\ {}_0N_{1,1} & \cdots & L_{31}\ {}_0N_{n,2}+L_{32}\ {}_0N_{n,1}\\ L_{12}\ {}_0N_{1,2}+L_{13}\ {}_0N_{1,2} & L_{22}\ {}_0N_{1,3}+L_{23}\ {}_0N_{1,2} & L_{32}\ {}_0N_{1,3}+L_{33}\ {}_0N_{1,2} & \cdots & L_{32}\ {}_0N_{n,3}+L_{33}\ {}_0N_{n,2}\\ L_{11}\ {}_0N_{1,2}+L_{12}\ {}_0N_{1,1} & L_{21}\ {}_0N_{1,3}+L_{23}\ {}_0N_{1,1} & L_{31}\ {}_0N_{1,3}+L_{33}\ {}_0N_{1,1} & \cdots & L_{31}\ {}_0N_{n,3}+L_{33}\ {}_0N_{n,1}\end{bmatrix}$$

其中：$L_{11}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,2}{}^tu_1^k$，$L_{22}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,2}{}^tu_2^k$，$L_{21}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,1}{}^tu_2^k$

$L_{12}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,2}{}^tu_1^k$，$L_{33}=\left(\sum_{k=1}^{n}N_k{}^tu_1^k\right)/{}^0\bar{x}_1$

3.2 非线性应变 - 位移转换矩阵：

$$\boldsymbol{B}_M=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{B}}_M & \tilde{\boldsymbol{O}} & \tilde{\boldsymbol{O}}\\ \tilde{\boldsymbol{O}} & \tilde{\boldsymbol{B}}_M & \tilde{\boldsymbol{O}}\\ \tilde{\boldsymbol{O}} & \tilde{\boldsymbol{O}} & \tilde{\boldsymbol{B}}_M\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{O}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\tag{28}$$

这里

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_M=\begin{bmatrix}{}_0N_{1,1}&0&0&{}_0N_{2,1}&\cdots&{}_0N_{n,1}\\{}_0N_{1,2}&0&0&{}_0N_{2,2}&\cdots&{}_0N_{n,2}\\{}_0N_{1,3}&0&0&{}_0N_{2,3}&\cdots&{}_0N_{n,3}\end{bmatrix}$$

3.3 第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的应力矩阵：

$${}_0^t\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}{}_0^t\tilde{S} & \tilde{O} & \tilde{O}\\ \tilde{O} & {}_0^t\tilde{S} & \tilde{O}\\ \tilde{O} & \tilde{O} & {}_0^t\tilde{S}\end{bmatrix}$$

其中：

$${}_0^t\tilde{S}=\begin{bmatrix}{}_0^tS_{11}&{}_0^tS_{12}&{}_0^tS^{31}\\{}_0^tS_{21}&{}_0^tS_{22}&{}_0^tS_{23}\\{}_0^tS_{31}&{}_0^tS_{32}&{}_0^tS_{33}\end{bmatrix}\tag{29}$$

便于有限元程序对刚度阵的计算要求，还要对应力 - 应变矩阵[C]进行定义，针对可压泡沫硅橡胶的应变能函数可表为伸长比的函数，因此可得到应力应变矩阵[C]的元素 C_{ij}：

$$C_{ij}=([\boldsymbol{W}_1]\{\boldsymbol{G}\}_j)^T\{\boldsymbol{G}\}_i+\{\boldsymbol{W}_2\}^T\{\boldsymbol{G}\}_{ij}\tag{30}$$

其中可设定以下矩阵：

$$\{\boldsymbol{G}\}_i=\left\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial E_i}\quad\frac{\partial\lambda_2}{\partial E_i}\quad\frac{\partial\lambda_3}{\partial E_i}\right\}^T=[\boldsymbol{R}]^{-1}\{\boldsymbol{H}\}_i\tag{31}$$

$$\{\boldsymbol{G}\}_{ij}=\left\{\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial E_i\partial E_j}\quad\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial E_i\partial E_j}\right\}^T\tag{32}$$

$$\{\boldsymbol{W}_1\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\\\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\\\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\end{Bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{W}_2]=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_1^2}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_1\partial\lambda_3}\\\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_2^2}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\\\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_3\partial\lambda_1}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_3\partial\lambda_2}&\frac{\partial^2W}{\partial\lambda_3^2}\end{bmatrix}\tag{33}$$

其中$\{\boldsymbol{E}\}=\{E_{11}\ E_{22}\ E_{33}\ E_{12}\ E_{23}\ E_{31}\}^T=$

$$\{E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5\ E_6\}^T\tag{34}$$

$$\{\boldsymbol{H}\}_i=\left\{\frac{\partial I_1}{\partial E_i}\ \frac{\partial I_2}{\partial E_i}\ \frac{\partial I_3}{\partial E_i}\right\}^T\tag{35}$$

4 本构关系的数值实现

$$[\boldsymbol{R}]=\left[\frac{\partial I}{\partial\lambda}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\frac{\lambda_1}{2}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)-\lambda_1&\frac{\lambda_1}{2}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)-\lambda_1&\frac{\lambda_1}{2}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)-\lambda_1\\\frac{\lambda_1}{4}(\lambda_2^2-1)(\lambda_3^2-1)&\frac{\lambda_2}{4}(\lambda_1^2-1)(\lambda_3^2-1)&\frac{\lambda_3}{4}(\lambda_2^2-1)(\lambda_1^2-1)\end{bmatrix}\tag{36}$$

另外，根据方程(3.5)，可以得到

$$\{\boldsymbol{G}\}_{ij}=[\boldsymbol{R}]^{-1}\left(\{\boldsymbol{H}\}_{ij}-\begin{Bmatrix}([\boldsymbol{Q}]_1\{\boldsymbol{G}\}_j)^T\{\boldsymbol{G}\}_i\\([\boldsymbol{Q}]_2\{\boldsymbol{G}\}_j)^T\{\boldsymbol{G}\}_i\\([\boldsymbol{Q}]_3\{\boldsymbol{G}\}_j)^T\{\boldsymbol{G}\}_i\end{Bmatrix}\right)\tag{37}$$

其中

$$\{\boldsymbol{H}\}_{ij}=\left\{\frac{\partial I_1}{\partial E_i\partial E_j}\quad\frac{\partial I_2}{\partial E_i\partial E_j}\quad\frac{\partial I_3}{\partial E_i\partial E_j}\right\}^T\tag{38}$$

$$[\boldsymbol{Q}]_a=\left[\frac{\partial^2I}{\partial\lambda^2}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial I_a}{\partial\lambda_1^2}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_1\partial\lambda_3}\\\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_2^2}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\\\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_3\partial\lambda_1}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_3\partial\lambda_2}&\frac{\partial^2I_a}{\partial\lambda_3^2}\end{bmatrix}\tag{39}$$

根据式(28 - 39)即可以求得应在变矩阵的元素，利用它能有效的进行有限元程序设计。

5 结　　论

从建立描述材料变形特征的应变能函数出发，提出了适合多孔隙、可压硅橡胶材料的本构关系。应变能函数可解耦为等容和体积变形两部分，所提出的对应体积变形的应变能函数能够描述可压多孔泡沫硅橡胶的非线性弹性变形行为。

利用完全的拉格朗日格式进行有限元的分析，推导了泡沫硅橡胶的有限变形的增量形式，获得了数值分析的有限元列式。通过编制刚度矩阵的计算模块，它可以推广并用于任意的几何非线性和材料非线性的可压超弹性材料的力学性能分析。

参考文献：

[1] Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials. I Fundamental concepts[J]. Phil Trans Soc, 1948, 240(3): 259-490.

[2] Yeoh O H. Some forms of the strain energy function for rubber [J]. Rubber Chemical and Technology, 1993, 66(7): 754-771.

[3] Tabaddor F. Rubber elasticity models for finite element analysis [J]. Computers & Structures, 1987, (1): 33-40.

[4] 匡震邦．非线性连续介质力学基础[M]．西安：西安交通大学出版社，1989.

[5] Chen J, Pan C. A pressure projection method for nearly incompressible rubber hyperelastic, Part I: Theory[J]. J Appl Mechanics, 1996, 63(8): 862-87.

[6] Chen J. Consistent finite element procedures for nonlinear rubber elasticity with a hither order strain energy function[J]. Computers & Structures, 1994, 50(6): 715-727.

[7] 危银涛，杨挺清，杜星文．橡胶类材料大变形本构关系及其有限元方法[J]．固体力学学报，1999，20(4)：281-282.

[8] 张汝清，詹先义．非线性有限元分析[M]．重庆：重庆大学出版社，1990.

Hyperelastic Constitutive Relations and Finite Element Formulation for Porous Silicone Rubber

LI Ling-feng[1], LIU Zhan-fang[1], JIAN Kai-lin[1], HU Wen-jun[2]

(1. Department of Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Institute of Structure Mechanics, China Academic of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

Abstract: The strain energy density function which was decoupled into isochoric parts and volumetric parts is presented for describing mechanical behaviors of compressible porous silicone rubber material, the constitutive model is then attained. The finite element formulation for isotropic hyperelastic porous silicone rubber is developed by use of total Lagrangean method.

Key words: foam silicone rubber; hyperelastic; finite element method

（责任编辑　钟学恒）

·下期论文摘要预告·

高速冲击条件下玻璃材料的破坏分析

姚国文，刘占芳

（重庆大学 工程力学系，重庆　400044）

摘　要：分析了玻璃材料在高速冲击条件下的破坏波现象，对破坏波的传播机制及其动态特征以及破坏层的性质进行了研究。在实验分析的基础上提出了一种由偏应力冲量决定的损伤累积模型，并采用 Heaviside 函数来描述材料内部的破坏迟滞现象；数值模拟了破坏波的传播过程、破坏层的横向应力和纵向压缩应变的演化特征，并得出了反射稀疏波在破坏层边界再次反射后破坏波传播速度下降的结论。