文章编号:1000-582X(2003)12-0119-03

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程在最优投资中的应用*

蒲兴成[1,2], 王海英[2]
(1. 重庆大学 自动化学院,重庆 400044;2. 重庆邮电学院, 重庆 400065)

摘 要:建立简单的衍生证券投资组合模型,利用 HJB 方程,讨论了在一定假设条件下衍生证券最优投资问题,得到相关投资策略与无风险投资收益率及风险投资期望收益率之间定量关系。并利用得到的定量关系式,讨论了投资策略与无风险收益率及风险投资期望收益率之间定性关系;同时也说明了人民币降息对国民经济的调控作用。

关键词:HJB-方程;马尔柯夫控制;最优投资
中图分类号:F224.11 **文献标识码**:A

HJB 方程是动态规划[1]和最优控制的基础,文[2]~[4]利用 HJB 方程,解决了一些随机最优控制问题.文[5]利用随机分析的相关知识,在市场完备性条件下构造性地得到了期权套期交易策略公式。笔者通过建立简单的衍生证券投资组合模型,利用 HJB 方程,讨论了在一定假设条件下衍生证券最优投资问题,得到相关投资策略与无风险投资收益率及风险投资期望收益率之间定量关系.并利用得到的定量关系式,讨论了投资策略与无风险收益率及风险投资期望收益率之间定性关系;同时也说明了人民币降息对国民经济的调控作用。

1 引理

引理 1[6] (HJB)方程(I))定义:$\Phi(y) = \sup\{J^u(y); u = u(y)$ 是一个马尔可夫控制$\}$,假设对所有 $y \in G$ 有 $\Phi \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ 是有界的,$T < \infty$ a. s. Q^y 且最优的马尔柯夫控制 u^* 存在.假定 $Y_t^{u^*}$ 在 ∂G 上是正则的,则对所有

$$y \in G, \sup_{v \in U}\{F^v(y) + (L^v\Phi)(y)\} = 0 \quad (1)$$

且对所有

$$y \in \partial G, \Phi(y) = K(y) \quad (2)$$

若 $v = u^*(y)$,此处 $u^*(y)$ 是最优控制,且 $u^*(y)$ 满足方程(1),则对所有 $y \in G$ 有

$$F(y, u^*(y)) + (L^{u^*(y)}\Phi)(y) = 0 \quad (3)$$

引理 2[6] ((HJB)方程(II))已知 $\phi \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$,对所有 $v \in U, F^v(y) + (L^v\phi)(y) \leqslant 0, y \in G$;其边界值满足:$\lim_{t \to T}\phi(Y_t) = K(Y_T) \cdot \chi_{T<\infty}$ a. s. Q^y 且满足:对所有马尔柯夫控制 u 和 $y \in G$, $\{\phi(Y_T)\}_{\tau \leqslant T}$ 是一致 Q^y-可积的.则对所有马尔柯夫控制 u 和所有 $y \in G$ 有 $\phi(y) \geqslant J^u(y)$.此外,若对每一个 $y \in G$,能找到 $u_0(y)$ 满足:$F^{u_0(y)}(y) + (L^{u_0(y)}\phi(y) = 0$,则 $u_0 = u_0(y)$ 是一个马尔柯夫控制,满足 $\phi(y) = J^{u_0(y)}(y)$,因此 $u_0 = u_0(y)$ 必是一个最优控制,且 $\phi(y) = \Phi(y)$.

说明 1:引理 1 表明,若一个最优控制 u^* 存在,则能得到式(1)—(3)3 个非常有用的结果,这样将原始的随机控制问题变成一个较简单的寻找 $U \subset R^k$ 中的实函数问题,使得 $F^v(y) + (L^v\Phi)(y)$ 达到最大值;引理 2 是引理 1 的一个逆命题,该引理表明:若在任意点 y 找到 $v = u_0(y)$ 满足 $F^v(y) + (L^v\Phi)(y)$ 是最大的且最大值是零,则 $v = u_0(y)$ 必是一个最优控制.利用引理 1-2,在下面的讨论中,较易得到了简单投资组合问题的一个定量研究结果.

2 简单投资组合模型

最优投资问题是经济生活中的一个热点问题,为使问题简单起见,假设该投资问题满足如下几个条件:(a)在初始时刻 t 财产数量 $X_t = x > 0$;(b)在任何时刻此人有权决定利用其财产的 $u(0 \leqslant u \leqslant 1)$ 倍用于风险投资,剩下的 $1-u$ 倍用于无风险投资;(c)$0 < b < a$;(d)在投资过程中,不能借债(即要求 $X \geqslant 0$);(e)

* 收稿日期:2003-06-30
基金项目:重庆邮电学院青年教师基金资助项目(A2003-07)
作者简介:蒲兴成(1973-),男,湖南洞口人,重庆大学博士研究生.主要研究方向:金融工程及随机控制。

在时刻 t 此人有两种不同的投资策略可选择，两种投资策略下的财产价格变化分别如下：

（i）一种财产在时刻 t 的价格满足下列的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}=P_1(a+\alpha W_t) \tag{4}$$

此处 W_t 表示白色噪音，且 a,α 是分别衡量价格 P 和噪音变化程度的量. 当 $\alpha>0$ 时，这种投资称为风险投资；（ii）另一种财产在时刻 t 的价格满足同样一个类似方程，但不包含白色噪音：$\mathrm{d}P_2=P_2b\mathrm{d}t$ 这种投资称为无风险投资.（f）由（e）中确定的式(4) 始终满足相应随机微分方程解的存在性条件[7]. 问：如何选择投资策略，使相应的投资收益最大？

说明 2：1) 在(a) 中初始时刻 t 财产数量 $X_t=x>0$ 意味着该投资方案的初始资金来自个体积累，而不是欠债的形式，这样处理是为了使问题简单起见；2) 在(c) 中即无风险投资收益率比风险投资收益率小，这是容易理解的；3)(f) 中的假定就能使讨论的问题结果更加确定.

3 结 论

在 2 中的假设条件下，上述投资问题存在唯一最优控制 u^* 使投资者获得最大收益.

证明：利用随机微分方程理论[8] 得到关于(4) 的随机微分方程为：

$$\mathrm{d}P_1=P_1a\mathrm{d}t+P_1\alpha\mathrm{d}B_t$$

再由假设条件(b) 得到：

$$\mathrm{d}(uX_t)=uX_ta\mathrm{d}t+uX_t\alpha\mathrm{d}B_t,$$
$$\mathrm{d}((1-u)X_t)=(1-u)bX_t\mathrm{d}t$$

这样就得到财产 $X_t=X_t^u$ 的随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}(uX_t)+\mathrm{d}((1-u)X_t)=uX_ta\mathrm{d}t+uX_t\alpha\mathrm{d}B_t+(1-u)bX_t\mathrm{d}t=X_t(au+b(1-u))\mathrm{d}t+\alpha uX_t\mathrm{d}B_t \tag{5}$$

现假定效用函数为：$N:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$N(0)=0$（通常假定是一个单增的凹函数），则相应的问题变成：寻找函数 $\Phi(s,x)$ 和一个马尔柯夫控制 $u^*=u^*(t,X_t)$，$0\le u^*\le 1$ 满足：$\Phi(s,x)=\sup\{J^u(s,x);u$ 为一个马尔可夫控制 $0\le u\le 1\}=J^{u^*}(s,x)$，此处 $J^u(s,x)=E^{s,x}[N(X_T^u)]$ 且 T 是脱离区域 $G=\{(r,z);r<t_0,z>0\}$ 的最初时刻. 则性能函数 $J^u(y)=E^y[\int_0^T F^{u_t}(Y_t)\mathrm{d}t+K(Y_T)\chi_{T<\infty}]=J^u(s,x)=E^{s,x}[N(X_T^u)](y=(s,x))$ 中：$F=0,K=N,(L^vf)(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}+x(av+b(1-v))\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\alpha^2v^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

由引理 1 可知，此时 HJB 方程变成：$\sup_v\{(L^v\Phi)(t,x)\}=0,(t,x)\in G$ 且当 $t=t_0$ 时：$\Phi(t,x)=N(x)$；$t<t_0$ 时：$\Phi(t,0)=N(0)$. 因此对每一个 (t,x)，将试图寻找 $v=u(t,x)$ 使得函数：

$$\eta(v)=L^v\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+x(av+b(1-v))\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}\alpha^2v^2x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{6}$$

取得最大值. 若 Φ 是一个满足假设条件关于 x 的单增凹函数，即：

$$\Phi_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}>0,\Phi_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}<0,$$

则对式(6) 右边关于 v 求导并使其等于零得：

$$x(a-b)\Phi_x+\alpha^2vx^2\Phi_{xx}=0$$

由此求得：

$$v=u(t,x)=-\frac{(a-b)\Phi_x}{x\alpha^2\Phi_{xx}} \tag{7}$$

为所求的函数. 将此代入 HJB 方程(6) 得到如下的关于 Φ 的非线性边界值问题：

$$\Phi_t+bx\Phi_x-\frac{(a-b)^2\Phi_x^2}{2\alpha^2\Phi_{xx}}=0,\quad t<t_0,x>0 \tag{8}$$

$$\Phi(t,x)=N(x),t=t_0\text{ 或 }x=0 \tag{9}$$

就问题(8)，(9) 来说，很难求得一般的 N. 为说明问题起见，选择幂函数 $N(x)=x^r$，$0<r<1$ 为效用函数，显然 N 是满足条件的函数，即 N 是单增凹的. 假设问题(6)，(7) 的形式解为：$\phi(t,x)=f(t)x^r$ 代入(8)，(9) 中得：$\phi(t,x)=\mathrm{e}^{\lambda(t_0-t)}x^r$，$\lambda=br+\frac{(a-b)^2r}{2\alpha^2(1-r)}$ 再利用(7) 得到最优控制为：$u^*(t,x)=\frac{a-b}{\alpha^2(1-r)}$. 若 $\frac{a-b}{\alpha^2(1-r)}\in(0,1)$，则由引理 2 可知，$\frac{a-b}{\alpha^2(1-r)}$ 是该问题的解，且 u^* 是一个常数，显然由 u^* 的求解过程易知 u^* 是唯一的.

说明 3：1) 由证明结果可知，在相应的假设条件下，只需知道初始财产，就知道该用多少用于风险投资，用多少用于无风险投资，这样就能获得最大投资收益；2) 这里的唯一性是相对于特定的效用函数而言，效用函数不同，则相应的最佳投资策略会发生改变. 如若选择效用函数 $N(x)=\log x$，利用 Dynkin 公式及估计得到：

$$E^{s,x}[\log(X_T)]=\log x+E^{s,x}[\int_s^T\{au(t,X_t)+b(1-u(t,X_t))-\frac{1}{2}\alpha^2u^2(t,X_t)\}\mathrm{d}t]$$

故 $J^u(\log x)=E^{s,x}[\log(X_T)]$ 取最大值等价于使 $av+b(1-v)-\frac{1}{2}\alpha^2v^2$ 取最大值，由此易得 $u^*=\frac{a-b}{\alpha^2}$（对所有的 t,ω）即为符合条件更为简单的一个结果.

4 应用

4.1 确定利率变化下的投资策略

由前面的推导可知:假设在其他条件不变的情况下,且$(a-b)/\alpha^2(1-r)$是该问题的解. 则无风险利率 b 的变化给投资策略所带来的影响:显然 u^* 是一个关于 b 的单减函数,故利率越大,用于风险投资的资金就越少,反之, 利率越小,用于风险投资的资金就越多;对用于无风险投资的资金来说,情况恰好相反. 从这一点也可体会人民币降息对国民经济的调控作用;即人民币降息可刺激存款者将钱取出来,用于其它风险投资,从而刺激房地产市场,股市及期货市场等行业的发展.

4.2 确定风险变化下的投资策略

在 3 的假设基础上,根据风险投资的相关知识:期望收益率与风险的的大小是一种单增关系,即 u^* 是一个关于 a 的单增函数,风险越大,风险期望收益率 a 越大,从而 u^* 也越大,故用于风险投资的资金就越多;反之,风险越小,期望收益率越小,用于风险投资的资金就越少.

参考文献:

[1] BELLMAN R. Dynamic Programming[M]. New Jersey: Princeton Univ Press, 1957.

[2] BARAS J S, ELLIOTT R J, KOHLMANN M. The Partially observed stochastic minimum principle[J]. SIAM J Control Optim, 1989, (27): 1 279 - 1 292.

[3] EKELAND I. Nonconvex minimization problems[J]. Bull Amer Math Soc(National Science) J, 1979, (1): 443 - 474.

[4] ZHOU X Y. A unified treatment of maximum principle and dynamic Programming in stochastic controls[J]. Stochastics Stochastics Rep, 1991, (36): 137 - 161.

[5] 傅强,蒲兴成. 完备市场下的期权定价和套期交易策略的选择[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2003, 26(5): 86 - 89.

[6] BERNT, KSENDAL. Stochastic Differential Equations An Introduction with Application [M]. New york: Springer, 1998. 1 - 232.

[7] DAMIEN LAMBERTON, APEYRE. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance [M]. London: Chapman&Hall, 1996. 1 - 53.

[8] 费里德曼 A. 随机微分方程及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1983. 13 - 101.

An Application of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation in Optimal Investment

PU Xing-cheng[1,2], *WANG Hai-ying*[2]

(1. College of Automation Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Chongqing Post and Telecommunication Academy, Chongqing 400065, China)

Abstract: The simple portfolio investment model is given, with the HJB equation. The optimal portfolio investment problem is discussed under some given supposition, the quantitative relations are gotten between the investment strategies and riskless investment income rate and risk investment income rate are gotten. And with the quantitative relations, we study the qualitative relations between the investment strategies and riskless investment income rate and risk investment income rate. This also accounts for the effect of the falling interest rate of RMB on the national economy.

Key words: HJB-equation; markov control; the optimal investment

(编辑　刘道芬)

(上接第 118 页)

Game Theory Analysis on Information Distortion in Supply Chain

SUN Hong-jie

(College of Business Administration, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Generally, low efficiency in information - sharing and the information distortion are came into being because of the conflicts in interests among the partners in the supply chain. This article discusses the phenomenon of information distortions and bullet effect in brief. It focuses on the information distortion caused by mechanism, and analyses the problem with game theory. In our discussion, a supply chain formed by a producer and a retailer is supposed, and to avoid information distortions, the producer how to design its mechanism.

Key words: supply chain; information distortion; game theory

(编辑　刘道芬)