文章编号:1000 - 582X(2003)07 - 0032 - 05

时滞神经网络稳定性、分岔与混沌的研究进展*

廖晓峰,李学明,吴开贵
(重庆大学 计算机学院,重庆 400044)

摘　要:时滞广泛存在于神经网络中,从非线性动力学的角度对时滞神经网络系统的研究进展作一综述,内容包括时滞神经网络系统的特点、研究方法、神经网络动力学的热点问题的研究进展以及亟待解决的问题等。由于时滞神经网络的演化趋势不仅依赖于系统的当前状态,还依赖于系统的过去某一时刻或若干时刻的状态,其运动方程要用泛函微分方程来描述,解的空间是无穷维的,因此,时滞神经网络的动态行为是非常复杂的。

关键词:神经网络;时滞;稳定性;分岔; 混沌
中图分类号:TP18　　**文献标识码**:A

1982 年,美国加州理工学院物理学家 Hopfield 提出了 HNN 模型[1],从而掀起了神经网络的新高潮,他引入了"计算能量函数"的概念,给出了网络稳定性的判据,它的电子电路实现为神经计算机的研究奠定了基础,同时开拓了神经网络用于联想记忆和优化计算的新途径。Hinton 和 Sejnowski 提出的 Boltzman 机模型则借助于统计物理学的概念和方法,首次采用了多层网络的学习算法,即在学习过程中用模拟退火技术,保证整个系统趋于全局稳定点;Rumelhart 和 McClelland 等提出的 PDP(并行分布处理)理论则致力于认知微观结构的探索,同时发展了多层网络的 BP 算法(反向传播学习算法),把学习的结果反馈到中间层的隐单元,改变它们的连接权矩阵,从而达到预期的学习目的,它是迄今为止应用得最多的网络;Kosko 提出了双向联想记忆神经网络[2],它是一种学习与联想的自适应网络,已在模式识别等领域里取得了广泛地应用;1988 年美国加州大学的蔡少棠教授提出了一种细胞神经网络[3],它是一种大规模的非线性模拟电路,能实时地处理信号,象细胞自动机一样,由规则分布的电路点格系大量的堆积而成,细胞只与相邻的细胞发生联系,每个细胞由线性电容、非线性电压控制电流源和一些非线性电路元件构成,它的连续时间特性,允许实时信号处理,它的局部互连特性有利于用 VLSI 实现。

神经网络就是通过对人脑的基本单元——神经元建模和连接,来探索模拟人脑神经系统功能的模型,并研制一种具有学习、联想、记忆和模式识别等智能信息处理功能的人工系统。神经网络的主要特征是:大规模的并行处理和分布式的信息存储,良好的自适应、自组织性,以及很强的学习功能、联想功能和容错功能,与当今的冯·若依曼式计算机相比,更加接近人脑的信息处理模式。

众所周知,在神经元的信息传递过程中应存在时滞,而时滞意味着网络模型应该与过去时间的神经元状态有关,这也正反映了大脑本身的特点。在现有神经网络模型上引入轴突信号传输时滞,那么相应的动力学系统就变成了带时滞的非线性动力学系统,因而它们的动力学性质将变得非常复杂,其动力学行为有可能演化到稳定的平衡点,有可能产生周期振荡或混沌。

1　时滞神经网络的一些特点和研究方法

如果在相应的时滞神经网络模型中令时滞为零,那么此时滞神经网络模型退化为相应的神经网络模型,在实际建模时,人们很自然地忽略小时滞,而将时

* 收稿日期:2003 - 02 - 28
基金项目:国家自然科学基金(60271019);教育部博士点基金(20020611007);重庆市科委应用基础项目(7370)资助。
作者简介:廖晓峰(1964 -),男,重庆人,重庆大学教授,博士生导师,主要从事人工神经网络、混沌保密通信、信息安全等方向的研究。

滞动力系统约简为一般动力系统，然而从动力学的角度看，这样做是不可靠的，事实上，容易举出反例[4]，存在这样的时滞动力系统，其约简的系统的平衡点是不稳定的，但对任意时滞，其时滞系统的平衡点是稳定的，反之亦然。对于周期解的存在性也有类似的结论。一个时滞神经网络模型存在 Hopf 分岔时，其约简的无时滞系统却可以不产生 Hopf 分岔。因此，在许多情况下，必须直接研究时滞神经网络模型。

时滞对系统的动态性质有很大的影响，例如，时滞常常导致系统失稳，又如，时滞系统一般有无穷多个特征值，从而从一个侧面说明时滞系统是无穷维的。非线性时滞神经网络模型比用无时滞神经网络模型有着更加丰富的动力学行为，例如，一个神经元自治时滞系统会产生分岔和混沌，但对无时滞系统来说，一阶系统和二阶自治系统都是不可能产生混沌。而通过研究混沌神经网络可分析脑模型的信息处理能力，可进一步探索动态联想记忆、动态学习并应用到模式识别等工程领域，例如：

1）对混沌的随机不规则现象，可利用混沌理论进行非线性预测和决策；

2）对被噪声所掩盖的微弱信号，如果噪声是一种混沌现象，则可通过非线性辩识，有效进行滤波；

3）利用混沌现象对初始值的敏感依赖性，构成模式识别系统；

4）研究基于混沌神经网络自适应存储检索算法。

目前，对非线性时滞神经网络尚没有针对性特别强的研究方法，无论是时域还是频域方法，基本上都是沿着与常微分方程平行的途径来研究时滞动力学系统的动力学性质，讨论非线性常微分方程的方法大多可以经过改造用于非线性时滞神经网络的研究中。如讨论稳定性的方法主要是特征值[4-6]和 Lyapunov 方法[7-23,26-29,42,56]，研究分岔的常用方法有中心流形法与规范形式[5,6,30-35,63]、Lyapunov - Schmidt 方法[36]、摄动法[37-38]、Fredholm 择一法以及频域法[39]，而时间历程、功率谱[31,40-41]、Poincare 截面、Lyapunov 指数[31]、分维数等仍是刻划非线性动力系统的混沌的工具。

2　时滞神经网络的稳定性研究状况

近几年，各种带时滞神经网络，如时滞 Hopfield 网络[4,7-9,18,20-22,25]、时滞细胞神经网络[12-15,17,19,23,26,28,40-41]和时滞双向联想记忆模型[11,24,42]相继提出，这些模型的各种稳定性也已进行了研究，如局部稳定性[4-5,30,36-38,43]、全局稳定性[7-9,18-22,25,64]、绝对稳定性[12-15,40-41]和指数稳定性[25-26]等；鉴于许多用途各异的时滞神经网络模型在形式上与标准的时滞动力学系统有一定差距，这些网络的稳定性问题一般都采用特殊的处理手段来对待，如前面所说，时滞细胞神经网络就是一个非光滑的时滞微分方程系统，对这类网络就某些非对称模板类，可以研究其绝对稳定性问题[12-15,40-41]。由于目前尚未出现关于时滞神经网络系统的统一模型，关于网络稳定性研究不仅没有统一的方法可循，而且许多研究结果也时常具有交叉和重复的内容。在研究时滞神经网络稳定性时，通常采用的方法是在平衡点附近线性化来研究局部稳定性或构造各种不同的 Lyapunov 函数并利用拉什密辛原理来得到全局或指数稳定性。然而运用 Lyapunov 方法得到的是一些不等式检验条件，由于该法依赖不等式估计技巧，并且所得条件忽略了神经元之间的兴奋与抑制影响，因而其条件是过度保守。最近，作者[43-44]提出用 Lyapunov - Krasovskii 稳定性理论和线性矩阵不等式的方法于时滞神经网络中，获得了一系列稳定性条件并克服了用 Lyapunov 方法所产生的缺陷，但这个方法是否可应用于其它时滞神经网络，如时滞细胞神经网络和时滞双向联想记忆模型是值得研究的课题。

虽然在有的时滞神经网络模型中也考虑了干扰信号的影响，却很少有人提到“网络系统的鲁棒稳定性[10,45]”这个术语，所谓网络系统的鲁棒稳定性即在指定网络系统的“邻近”系统中，某些动力学行为如平衡稳定性的保持问题。现已有结果表明：在某些网络系统中可以得到鲁棒稳定性条件。然而，如何尽可能提高系统鲁棒稳定性的界是一个具有挑战性的问题。在时滞神经网络中，人们也常提到系统鲁棒性的概念，这是指神经网络是一个巨系统，网络中个别神经元和连接权受损并不影响网络的整体行为，如学习和联想记忆等功能。

3　时滞神经网络的 Hopf 分岔与周期解

时滞常导致系统的运动失稳，产生各种形式的分岔。在非线性时滞动力系统的分岔中，讨论得最多的是 Hopf 分岔，已有的工作中大多是对 1 个或 2 个神经元系统来进行研究；对于 3 个以及更多的神经元时滞系统，要给出分岔存在的条件常常非常困难，要得到系统的分岔方程，则一般要借助于计算机代数，对于多时滞动力系统更是如此。作者讨论了一个神经元的时滞系统的稳定性和 Hopf 分岔，并运用中心流形定理证明了分岔周期解的稳定性[31]；Olien 和 Belari[30]研究了无自连接（神经元不与自身状态发生联系）的 2 个神

经元时滞系统,并证明了 Hopf 分岔的存在性,然而他们并未研究周期解的稳定性;Gopalsamy 和 Leung[36]研究了带时滞两个神经元系统的分岔周期解的解析机理;Wei 和 Ruan[33]分析了 2 个不同时滞且 2 个神经元系统,对于无自连接情形,他们发现:当 2 个时滞的和超过临界值时,Hopf 分岔出现并由此决定了 Hopf 分岔方向与稳定性;然而,带分布时滞神经网络应比带离散时滞神经网络更一般,这是因为当时滞核取 δ 函数时带分布神经网络变为带离散时滞神经网络[5,7,24,29,32];因此,作者在文献[32]考虑了带分布时滞的 2 个神经元模型,Hopf 分岔的存在性以及周期解的稳定性也进行了讨论;作者[6]研究了带 2 个离散时滞的调和振子,通过分析线性化方程对应的超越特征方程而得到这个方程零解的局部稳定性,选 1 个时滞作为分岔参数,Hopf 分岔的存在性以及周期解的稳定性也进行了详细讨论,进而研究了特征方程有 2 个纯虚根的情形,因而余维 -2 分岔也进行了研究,然而值得研究的课题是,带自连接的 2 个时滞神经元系统的 Hopf 分岔以及余维 -2 分岔和余维 -3 分岔等。

4 时滞神经网络的混沌现象

神经网络和混沌的相互融合始于 90 年代,发展很快。其主要目标是弄清大脑的混沌现象,建立有混沌动力学的神经网络模型[31,40-41,46,50-60],并用之于信息处理中,提高信息处理的效率与柔性。如果把混沌吸引子作为一个记忆单位,用来表示网络所记忆的某一特定信息,然后通过调整网络某些参数改变网络的动力学行为,能实现动态记忆的功能。另外,它还具有自适应搜索功能。Parisi[57]指出在非对称耦合神经网络中有复杂动力学行为和混沌解的存在。Aihara[54]指出混沌神经网络有极强的能力有效地传输由外界馈入的信息,并进一步认为,可作为鲁棒性信息的传输通道。

实际上,在混沌神经网络的研究中,人们已经试图利用混沌来实现某种功能。Ikeguchi[58]等尝试着用 Aihara 等人的混沌神经网络[54]作联想记忆,他们用一个混沌神经元组成一个具有两种内部状态的神经网络,该网络最大 Lyapunov 指数是 0.098,由 Kaplan 和 Yorke 的计算公式得到相应的 Hausdorff 维数是 14.23,将 3 个相互正交的模式存贮在这种网络中,最后网络出现阵发式的回忆。Parodi 等[59]利用混沌的伪随机行为产生对应于确定性输入模式的噪声模式来实现信息编码。Narad 等[60]利用非对称递归神经网络的复杂动力学进行复杂模式的搜寻,证明这种基于活化状态空间中复杂的混沌轨迹的搜寻比随机搜寻更有效,并且混沌轨道的动态结构对搜寻行为的有效性影响很大。Yoshizawa[61]对非单调激和特性的神经网络的研究表明,可以利用混沌来消除网络的伪记忆态,当网络不能回忆起正确的记忆时,表现出一种混沌行为,而不会给记忆结果。

然而,和无时滞神经网络不同,一阶非线性时滞神经网络即可产生混沌现象。作者[31]研究 Hopf 分岔时,当分岔参数超过某个临界值时发现了混沌现象;Lu[40]等采用分段线性函数也发现了一个混沌现象;Gilli[41]发现了两个时滞细胞神经网络有“双蜗卷”混沌现象。然而对时滞神经网络的同宿与异宿轨道的研究还不多[62]。

参考文献:

[1] HOPPFIELD J. J. Neural Networks and Physical System with Collective Computational Abilities[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1982,79:2 554-2 558.

[2] KOSKO B. Neural Networks and Fuzzy Systems—A Dynamical System Approach to Machine Intelligence[D]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

[3] CHUA LO, YANG L. Cellular Neural Networks: theory[J]. IEEE Trans. on CAS - I 1988,35(10):1 275-1 272.

[4] MARCUS C M, WESTERVELT R M. Stability Analog Neural Networks with Delay[J]. Phys. Rev. A, 1989, 39:347-359.

[5] LIAO X F, WU Z F, YU J B. Stability Switches and Bifurcation Analysis of a Neural Network with Continuously Delay[J]. IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, 1999, 29(6):692-696.

[6] LIAO X F, CHEN G R. Local stability, Hopf and Resonant Codimension-two Bifurcation in a Harmonic Oscillator with Two Time Delays[J]. International Journal of Bifurcations and Chaos, 2001,11(8):2 105-2 121.

[7] GOPALSMAY K, HE K Z. Stability in Asymmetric Hopfield Net with Transmission Delays[J]. Physica D, 1994, 76:344-358.

[8] VAN DEN DRIESSCHE P, ZOU X. Global Attractivity in Delayed Hopfield Neural Network Model[J]. SIAM J. Appl. Math., 1998,58:1878-1890.

[9] CAO Y J, WU Q H. A Note on Stability of Analog Neural Networks with Time Delays[J]. IEEE Trans. on Neural Networks, 1996, 7:1 533-1 535.

[10] LIAO X F, YU J B. Robust Interval Stability Analysis of Hopfield Neural Network with Time Delay[J]. IEEE Trans. on Neural Networks, 1998,9(5):1 042-1 045.

[11] LIAO X F, YU J B. Qualitative Analysis of Bi-directional Associative Memory with Time Delays[J]. International Journal of Circuits Theory and Applications, 1998,26:219-229.

[12] ROSKA T, CHUA LO. Cellular Neural Networks with Nonlinear and Delay - type Template Elements and Non - uniform Grids[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1992,20:469 - 481.

[13] ROSKA T, WU C F, BALSI M, et al. Stability and Dynamics of Delay - type General and Cellular Neural Networks [J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1992, 39: 487 - 490.

[14] ROSKA T, WU C F, CHUA LO. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay - type templates[J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1993, 40:270 - 272.

[15] GILLI M. Stability of Cellular Neural Networks and Delayed Cellular Neural Networks with Nonpositive Templates and Nonmonotonic Output Functions[J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1994, 41:518 - 528.

[16] LIAO X F, WONG K W, WU Z F, et al. Novel Robust Stability Criteria for Interval Hopfield Neural Networks with Time Delays [J]. IEEE Trans. on CAS - I, 2001, 48 (11):1 055 - 1 059.

[17] LIAO X F, WONG K W, YU J B. Novel Stability Conditions for Cellular Neural Networks with Time Delays [J]. International Journal of Bifurcations and Chaos, 2001, 11 (7): 1 835 - 1 864.

[18] YE H, MICHEL A N, WANG K. Global Stability and Local Stability of Hopfield Neural Networks with Delays [J]. Phys. Rev. E, 1994,50:4 206 - 4 213.

[19] ARIK S, TAVSANOGLU V. Equilibrium analysis of delayed CNNs[J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1998, 45:168 - 171.

[20] ARIK S. Stability Analysis of Delayed Neural Networks [J]. IEEE Trans. Circ Syst., 2000, 47 (7): 1 089 - 1 092.

[21] JOY M P. On the Global Convergence of a Class of Functional Differential Equations with Applications in Neural Network Theory[J]. J. of Mathematical Analysis and Applications, 1999,232: 61 - 81.

[22] JOY M P. Results Concerning the Absolute Stability of Delayed Neural Networks [J]. Neural Networks, 2000, 13: 613 - 616.

[23] LIAO T, WANG F. Global Stability for Cellular Neural Networks with Time Delay[J]. IEEE Trans. Neural Networks, 2000,11(6):1 481 - 1 484.

[24] GOPALSAMY K, HE X Z. Delay - independent Stability in Bidirectional Associative Memory Networks [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1994, 5:998 - 1 002.

[25] ZHANG Y. Global Exponential Stability and Periodic Solutions of Delay Hopfield Neural Networks[J]. Int. J. Syst. Sci., 1996, 27(2):227 - 231.

[26] CAO J. Periodic Oscillation and Exponential Stability of Delayed CNNs [J]. Physics Letters A, 2000, 270: 157 - 163.

[27] CHUA LO, ROSKA T. The CNN Paradigm[J]. IEEE Trans. on CAS - I,1993, 40(2):147 - 156.

[28] CIVALLERI, P P. On Stability of Cellular Neural Networks with Delay[J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1993,40(3): 157 - 164.

[29] LIAO X F, WU Z F, YU J B. Stability Analyses Cellular Neural Networks with Continuous Time Delay[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 143:29 - 47.

[30] OLIEN L, BELAIR J. Bifurcations, Stability and Monotonicity Properties of a Delayed Neural Network Model[J]. Physica D, 1997,102:349 - 363.

[31] LIAO X F, WONG K W, LEUNG C S, et al. Hopf Bifurcation and Chaos in a Single Delayed Neuron Equation with Non - monotonic Activation Function[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001,21:1 535 - 1 547.

[32] LIAO X F, WONG K W, WU Z F. Bifurcation Analysis in a Two - neuron System with Distributed Delays[J]. Physica D, 2001, 149:123 - 141.

[33] WEI J, RUAN S. Stability and Bifurcation in a Neural Network Model with Two Delays[J]. Physica D, 1999,130: 255 - 272.

[34] BELAIR J, CAMPBELL S, VAN DEN DRIESSCHE P. Frustration, Stability and Delay - induced Oscillations in a Neural Network Model[J]. SIAM Journal Applied Mathematics, 1996, 56:245 - 255.

[35] BELAIR J, CAMPBELL S. Stability and Bifurcations of Equilibria in a Multiple - delayed Differential Equation [J]. SIAM J. Appl. Math., 1994,54:1 402 - 1 424.

[36] GOPALSAMY K, LEUNG I. Delay Induced Periodicity in a Neural Network of Excitation and Inhibition[J]. Physica D, 1996,89:395 - 426.

[37] PAKDAMAN K, GROTTA - RAGAZZO C, MALTA C P. Transient Regime Duration in Continuous - time Neural Networks with Delay[J]. Physical Review E, 1998,58(3):3 623 - 3 627.

[38] PAKDAMAN K. Effect of Delay on the Boundary of the Basin of Attraction in a System of two Neurons[J]. Neural Networks, 1998,11:509 - 519.

[39] MOIOLA J L, CHEN G. Hopf Bifurcation Analysis: a Frequency Domain Approach [D]. World Scientific, Singapore, 1996.

[40] LU H T, HE Z Y. Chaotic Behavior in First - order Autonomous Continuous - time Systems with Delay [J]. IEEE Trans. CAS - I, 1996, 43(8):700 - 702.

[41] GILLI M. Strange Attractors in Delayed Cellular Neural Networks[J]. IEEE Trans. on CAS - I, 1993, 40:. 849 - 853.

[42] LIAO X F, YU J B, CHEN G R. Novel Stability Criteria for Bi - directional Associative Memory Neural Networks with Time Delays[J]. International Journal of Circuits Theory and Applications, 2002, 30:519 - 546.

[43] LIAO X F, CHEN G R, SANCHEZ EDGAR N. LMI -

based Approach for Asymptotically Stability Analysis of Delayed Neural Networks[J]. IEEE Trans. CAS - I, 2002, 49(7):1 033 - 1 039.

[44] LIAO X F, CHEN G R, SAMCHEZ EDGAR N. Delay - dependent Exponential Stability of Delayed Neural Networks: an LMI Approach[J]. Neural Networks, 2002, 15: 855 - 866.

[45] LIAO X F, WONG K W, WU Z F. Asymptotic Stability Criteria for a Two - neuron Network with Different Time Delays[J]. IEEE Trans. On Neural Networks, 2003, 14:222 - 227.

[46] PASEMANN F. Discrete Dynamics of Two - neuron Networks[J]. Open Systems and Information dynamics, 1996, 2: 49 - 66.

[47] GOPALSMAY K, LEUNG ISSIC K C. Convergence Under Dynamical Thresholds with Delays[J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1997, 8(2):341 - 348.

[48] KURTEN K E, CLARK J W. Chaos in Neural Systems [J]. Phys. Lett. A, 1986,144(7): 413 - 418.

[49] FREEMAN W J. Simulation of Chaotic EEG Patterns with a Dynamic Model of the Olfactory System[J]. Biol. Cybern. 1987,56(2/3):139 - 150.

[50] RIEDEL U, KUHN R, VAN HEMMEN J L. Temporal Sequences and Chaos in Neural Nets [J]. Phys. Rev. A 1988,38(2):1 105 - 1 108.

[51] KEPLER T B, DATT S, MEYER R B, et al. Chaos in a Neural Network Circuit[J]. Physica D, 1990,46(3):449 - 457.

[52] DAS II P K, SCHIEVE W C, ZENG Z J. Chaos in an Effective Four - neuron Neural Network[J]. Phys. Lett. A, 1991,161(1): 60 - 66.

[53] ZOU F, NOSSEK J A. Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Networks[J]. IEEE Trans. Circuits syst., 1993, 40(3):166 - 172.

[54] AIHARA K, TAKABE T, TOYODA M. Chaotic Neural Networks[J]. Phys. Lett. A, 1990,144:333 - 340.

[55] BABLOYANTZ A, LOURENCO C. Computation with Chaos: a Paradigm for Cortical Activity[J]. Proc. Natl. Acad. Sci., USA,1994, 91:9 027 - 9 031.

[56] FREEMAN W J. Tutorial on Neurobiology: From Single Neurons to Brain Chaos [J]. Int. J. Bif. and Chaos, 1992,2:451 - 482.

[57] PARISI G. Asymmetric Neural Network and the Processing of Learning[J]. Journal of Physical A, Mathematical and General, 1986, 19: 675 - 680.

[58] LKEGUCHI T, AIHARA K. Associative Dynamics in Chaotic Neural Networks [C]. In: Proc IJCNN, Singapore: 1991,2 282 - 2 287.

[59] PARODI G. Using Chaos to Generate Keys for Associative Noise - like Coding Memories[J]. Neural Networks, 1993, 6:559 - 572.

[60] NARA S. Memory Search Using Networks Incorporating the Date Hypothesis ad Noise - drive Chaos [J]. Phys Rev Lett., 1990, 64:1 465 - 1 468.

[61] YOSHIZAWA S, MORITA M, AMARI S. Capacity of Associative Memory Using a Nonmonotonic Neuron Model[J]. Neural Networks,1993, 6:167 - 176.

[62] ZOU F, KATERLE A, NOSSEK J A. Homoclinic and Heterclinic Orbits of the Three Cell Cellular Neural Networks[J]. IEEE Trans. On CAS - I, 1993,40(7):843 - 848

[63] LIAO X F, WONG K W, WU Z F. Hopf Bifurcation and Stability of Periodic Solutions for Van der pol Equation with Distributed Delay[J]. Nonlinear Dynamics, 2001, 26:23 - 44.

[64] BELAIR J, DUFOUR S. Stability in a Three - dimensional System of Delay - differential Equations[J]. Can. Appl. Math. Quart. 1996,4:135 - 156.

Survey on Stability, Bifurcation and Chaos in Delayed Neural Networks

LIAO Xiao-feng, LI Xue-ming, WU Kai-gui

(College of Computer, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: From the viewpoint of nonlinear dynamics, this review outlines the recent advances as well as some open problems in the study of neural networks with time delays, an important class of delayed systems in various neural network models. The survey includes three aspects as fellows: the dynamic features, available approaches and advances in research on most attractive problems. The evolution of a delayed neural network depends not only on the current state of the systems but also on previous ones. Hence, a delayed neural network should be modeled by a functional differential equation, the solution space of which is of infinite dimensions. Therefore, the dynamical behavior of delayed neural networks is very complex.

Key words: neural networks; time delays; stability; bifurcation; chaos

(编辑 吕赛英)