文章编号:1000－582X(2003)09－0032－04

# 模糊动力有限元平衡方程的建立及解法*

宋 小 保
(1. 重庆大学 资源及环境科学学院, 重庆 400044)

**摘 要**:考虑到工程结构分析中某些边界条件,环境介质,特别是某些载荷存在的模糊性,为了更好地解决工程中存在的实际问题,必须考虑其结构的模糊性,只有这样,所求得的解才更接近其实际情况。根据 Zadeh 扩展原理和达朗贝尔原理可以建立起模糊振动方程。综合普通有限元方法可得到模糊有限元平衡方程。基于 $L-R$ 型模糊数和 $L-R$ 型模糊化函数,利用 $L-R$ 型模糊数和区间方程的性质,对其进行有界闭模糊数转化,可以把模糊有限元平衡方程转化为一组普通方程和一组区间方程,对区间方程可以应用区间数的性质来进行求解,进而可以求出方程的解。

**关键词**:模糊性; 有限元; $L-R$ 型模糊数; 动力平衡方程
**中图分类号**:O159 **文献标识码**:A

模糊数学的创始人 Zadeh 指出:在控制和系统理论中,过分地考虑精确性是没有良好效果的。随着上世纪中期模糊数学的出现,模糊数学得到了极大的发展,文献[1－3]把模糊数学方法引入到有限元中,取得了一定的成果。笔者主要是在此基础上用模糊有限元方法对动力问题进行研究。

## 1 模糊数的 $L-R$ 定义[4]

通常,用 $L$ 或 $R$ 表示一个函数,称它为模糊数的一个基准函数。当且仅当满足下列条件时:①$L(x)=L(-x)$,$R(x)=R(-x)$②$L(0)=1$,$R(0)=1$③$L$ 在$[0,+\infty)$上不增。这时称该模糊数 $\tilde{M}$ 为 $L-R$ 型模糊数。

$$\mu_{\tilde{m}}(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & x\leqslant m,\alpha>0\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x\geqslant m,\beta>0\end{cases} \tag{1}$$

其中 $L$ 表示左基准函数,$R$ 是右基准函数,$m$ 是 $\tilde{M}$ 的主值,$\alpha$ 和 $\beta$ 分别称为 $\tilde{M}$ 的左右展形,展型为零时,$\tilde{M}$ 是非模糊数。模糊数 $\tilde{M}$ 可表示为:

$$\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$$

文中用到的 $L-R$ 型模糊数的运算法则有:

设两个模糊数 $\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$,$\tilde{N}=(n,\gamma,\delta)_{LR}$

① 加法法则:$(m,\alpha,\beta)_{LR}\oplus(n,\gamma,\delta)_{LR}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$

② 减法法则:$(m,\alpha,\beta)_{LR}-(n,\gamma,\delta)_{RL}=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$

③ 乘法法则:

a) 当 $\tilde{M}>0$,$\tilde{N}>0$ 时

$(m,\alpha,\beta)_{LR}\cdot(n,\gamma,\delta)_{LR}=(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR}$

b) 当 $\tilde{M}<0$,$\tilde{N}>0$ 时

$(m,\alpha,\beta)_{RL}\cdot(n,\gamma,\delta)_{LR}=(mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)_{RL}$

c) 当 $\tilde{M}<0$,$\tilde{N}<0$ 时

$(m,\alpha,\beta)_{LR}\cdot(n,\gamma,\delta)_{LR}=(mn,-m\delta-n\beta,-n\alpha-m\gamma)_{RL}$

④ 数量积法则:

对于 $\lambda>0$,且 $\lambda\in R$,有 $\lambda\cdot(m,\alpha,\beta)_{LR}=(\lambda m,\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR}$

对于 $\lambda<0$,且 $\lambda\in R$,有 $\lambda\cdot(m,\alpha,\beta)_{LR}=(\lambda m,-\lambda\beta,-\lambda\alpha)_{LR}$

$L-R$ 型模糊数可以分解成主值与一零模糊数之和,即:

$$\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)_{LR}=m+(0,\alpha,\beta)_{LR}$$

## 2 模糊有限元动力平衡方程的建立[5,6]

### 2.1 由 Zadeh 扩展原理,把普通有限元中的基本方程扩展到模糊有限元中

模糊动力平衡方程:

* 收稿日期:2003－04－24
作者简介:宋小保(1974－),男,河南开封市人,重庆大学硕士研究生,研究方向为计算力学。

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}+F_i-C\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i=0\\ \sigma_{ij,j}^L+F_i^L+Cu_i^R+\rho u_i^R=0\\ \sigma_{ij,j}^R+F_i^R+Cu_i^L+\rho u_i^L=0\end{cases}\tag{2}$$

### 2.2 模糊平衡方程的建立

在振动问题中，应用达朗贝尔原理建立的振动方程仍具有静力方程的形式，只不过节点的位移是动位移，节点的载荷是动载荷，它们都是时间的函数，这时方程变为：

$$\tilde{K}\tilde{\delta}(t)=\tilde{P}(t)$$

式中的 $\tilde{\delta}(t)$ 为节点的动位移，是时间的函数，$\tilde{K}\tilde{\delta}(t)$ 是节点动位移引起的节点力——弹性恢复力，$\tilde{P}(t)$ 是节点的动载荷，由两部分组成，一部分是作用在节点上的模糊外激振力 $\tilde{P}_Q(t)$，另一部分是由结构振动产生的惯性力和阻尼力引起的模糊动载荷 $\tilde{P}_I(t)$ 和 $\tilde{P}_d(t)$ 于是上式可变为：

$$\tilde{K}\tilde{\delta}(t)=\tilde{P}_I(t)+\tilde{P}_d(t)+\tilde{P}_Q(t)\tag{3}$$

式中：$\tilde{K}\tilde{\delta}(t)$：节点弹性恢复力；$\tilde{P}_I(t)$：节点惯性力；$\tilde{P}_d(t)$：节点阻尼力；$\tilde{P}_Q(t)$：节点激振力。

式(3) 就是振动结构各个节点的运动方程——模糊振动方程。

设单元的模糊位移函数为：

$$\tilde{v}(x,t)=N\tilde{x}^e(t)\tag{4}$$

式中，$N$ 只是坐标 $x$ 的函数，与时间无关，因此由上式求单元刚度阵时和静力的一样。

设振动结构的密度为 $\rho$，则单位体积的惯性力密度为：

$$\tilde{I}(x,t)=-\rho\ddot{\tilde{v}}(x,t)\tag{5}$$

式中，$\ddot{v}(x,t)$ 为结构的横向运动加速度，根据虚功等效原则，由单元惯性力引起的等效载荷为：

$$\tilde{F}_I^e(t)=\int_{ve}N^{T}\tilde{I}(x,t)dV=-\int_{ve}N^{T}\rho\ddot{\tilde{v}}(x,t)dV=$$

$$\int_{ve}N^{T}\rho NdV\ddot{\tilde{v}}^e(t)$$

令 $M^e=\int_{ve}N^{T}\rho NdV$

则上式变为：

$$\tilde{F}_I^e(t)=-M^e\ddot{\tilde{v}}^e(t)$$

式中 $M^e$ 叫作单元质量矩阵，若将每个所计算出的由惯性力引起的等效节点载荷集成，则得到整个结构系统的整体惯性节点模糊载荷列阵：

$$\tilde{P}_I(t)=-M\ddot{\tilde{v}}(t)\tag{6}$$

式中，$M$ 为整体质量矩阵。

设振动结构的运动阻尼系数为 $v$，按照粘性阻尼假定，单位体积上所受到的阻尼力为[4]：

$$\tilde{d}(x,t)=-v\dot{\tilde{v}}(x,t)$$

式中，$\dot{v}(x,t)$ 是振动结构横向运动的速度，根据虚功等效原则，由单元阻尼力引起的等效节点载荷为：

$$\tilde{F}_d^e(t)=\int_{ve}N^{T}\tilde{d}(x,t)dV=$$

$$-\int_{ve}N^{T}v\dot{\tilde{v}}(x,t)dV=-\int_{ve}vN^{T}NdV\dot{\tilde{x}}^e(t)$$

令　$C^e=\int_{ve}vN^{T}NdV$

则上式变为：$\tilde{F}_d^e(t)=-C^e\dot{\tilde{x}}^e(t)$ 式中 $C^e$ 叫作单元阻尼矩阵。

若将每个单元所计算的由阻尼力引起的等效节点载荷集成，则得到整个结构系统的整体阻尼节点模糊载荷列阵：

$$\tilde{P}_d(t)=-C\dot{\tilde{x}}(t)\tag{7}$$

式中 $C=\sum_{e=1}^{n}C^e$ 为整体阻尼矩阵。

将(6)，(7) 两式代入到(3) 式中可得到：

$$\tilde{K}\tilde{x}(t)=-M\ddot{\tilde{x}}(t)-C\dot{\tilde{x}}(t)+\tilde{P}_Q(t)\tag{8}$$

移项可得：

$$M\ddot{\tilde{x}}(t)+C\dot{\tilde{x}}(t)+\tilde{K}\tilde{x}(t)=\tilde{P}_Q(t)\tag{9}$$

## 3 模糊平衡方程的求解

只考虑无阻尼和外载的情况，则方程(9) 可变为：

$$M\ddot{\tilde{x}}(t)+\tilde{K}x=0\tag{10}$$

它的解可设为：

$\tilde{x}=\tilde{X}\sin(\tilde{p}t+\phi)$ 其中 $\tilde{X}$ 为模糊振幅列阵，$\tilde{p}$ 为模糊圆频率，它们都是待定的量。将其代入自由振动微分方程(10) 得：

$$[\tilde{K}-\tilde{p}^2M]\tilde{X}=0\tag{11}$$

这一方程具有非零解的条件是：

$$|\tilde{K}-\tilde{p}^2M|=0\tag{12}$$

它称为系统的模糊特征方程。由此可确定 $\tilde{p}^2$ 的 $n$ 个正实根 $\tilde{p}_i^2$，并按 $\tilde{p}_i\leqslant p_{i+1}$ 排列，$i=1,2,\cdots n$。将各个不同的 $p_i$ 逐一代入上式，可得下列主振型方程：

$$[\tilde{K}-\tilde{p}^2M]\tilde{X}_i=0,i=1,2,\cdots n$$

即：

$$\tilde{K}\tilde{X}=\tilde{\lambda}M\tilde{X}\tag{13}$$

其中 $\tilde{\lambda}=\tilde{p}^2$

由此，在不计任意倍数差别的意义下，可确定 $n$ 个实矢量 $\tilde{X}_i$，称为系统的主振型。由下式

$$\tilde{x}_i=\tilde{X}_i\sin(\tilde{p}_it+\phi),i=1,2\cdots n\tag{14}$$

表示的运动称为系统的主振动，主振型的一个重要性质是可对其单位化，即

$$\tilde{X}_i^{T}M\tilde{X}_i=1\tag{15}$$

另一个重要性质是它具有正交性，即当 $i\neq j$ 时，有：

$$\tilde{X}_i^{\mathrm{T}} M \tilde{X}_j = 0, \tilde{X}_i^{\mathrm{T}} \tilde{K} \tilde{X}_j = 0$$

事实上，$\tilde{X}_i$ 与 $\tilde{X}_j$ 分别为系统的第 $i$ 个与第 $j$ 个主振型，因而有：

$$\tilde{K}\tilde{X}_i = \tilde{p}_i^2 M \tilde{X}_i, \tilde{K}\tilde{X}_j = \tilde{p}_j^2 M \tilde{X}_j$$

将第 1 式转置，再后乘以 $\tilde{X}_j$。对第 2 式前乘以 $\tilde{X}_i^{\mathrm{T}}$，然后两式相减，可得：

$$(\tilde{p}_i^2 - \tilde{p}_j^2)\tilde{X}_i^{\mathrm{T}} M \tilde{X}_j = 0$$

考虑到 $\tilde{p}_i$ 不等于 $\tilde{p}_j$，于是前式得证，同理可证明第 2 式。

定义 sign 函数如下：

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{16}$$

利用 $L-R$ 型模糊数的性质，进行展开可得第 $i$ 个方程为[5]

$$\sum_{j=1}^{n} \{(K_{ij}, K_{ij}^L, K_{ij}^R)_{LR} \cdot (X_j, X_j^L, X_j^R)_{LR}\} = \sum_{j=1}^{n} \{(\lambda_i, \lambda_i^L, \lambda_i^R\}_{LR} m_{ij} (X_j, X_j^L, X_j^R)_{LR}\} \tag{17}$$

将其分解可得：

$$\sum_{j=1}^{n} \{(K_{ij} + (0, K_{ij}^L, K_{ij}^R)_{LR} \cdot (X_j + (0, X_j^L, X_j^R)_{LR}\} = \sum_{j=1}^{n} \{[\lambda_i m_{ij} + (0, \lambda_i^L m_{ij}, \lambda_i^R m_{ij})_{LR}] \cdot (X_j + (0, X_j^L, X_j^R)_{LR})\}$$

即：

$$\sum_{j=1}^{n} \{K_{ij}X_j + \mathrm{sign}(K_{ij})\mathrm{sign}(X_j)(0, |K_{ij}| X_j^L + |X_j| K_{ij}^L, |K_{ij}| X_j^R + |X_j| K_{ij}^R)_{LR} = \sum_{j=1}^{n} \{\lambda_i m_{ij} X_j + \mathrm{sign}(\lambda_i m_{ij})\mathrm{sign}(X_j) \cdot (0, |\lambda_i m_{ij}| X_j^L + |X_j| \lambda_i^L m_{ij}, |\lambda_i m_{ij}| X_j^R + |X_j| \lambda_i^R m_{ij})_{LR} \tag{18}$$

又可变为：

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} X_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i m_{ij} X_j \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(K_{ij})\mathrm{sign}(X_j)(0, |K_{ij}| X_j^L + |X_j| K_{ij}^L, |K_{ij}| X_j^R + |X_j| K_{ij}^R)_{LR}\} = \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(\lambda_i m_{ij})\mathrm{sign}(X_j)(0, |\lambda_i m_{ij}| X_j^L + |X_j| \lambda_i^L m_{ij}, |\lambda_i m_{ij}| X_j^R + |X_j| \lambda_i^R m_{ij})_{LR}\} \quad i = 1,2,\cdots n \tag{20}$$

因为有

$$\tilde{X}_i^{\mathrm{T}} M \tilde{X}_i = 1 \tag{21}$$

所以可以推出：

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{(X_i^{\mathrm{T}}, X_i^{LT}, X_i^{RT})_{LR} m_{ij} (X_i, X_i^L, X_i^R)_{LR}\} = (1,0,0)_{LR}$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i^T m_{ij} X_i = 1 \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(X_i)\mathrm{sign}(X_i^{\mathrm{T}})(0, |X_i^{\mathrm{T}}| m_i^j X_i^L + |X_i| m_i^j X_i^{LT}, |X_i^{\mathrm{T}}| m_i^j X_i^R + X_i^{RT} m_{ij} |X_i|)_{LR} = (0, \mathrm{sign}(\underline{\varepsilon})\underline{\varepsilon}, \mathrm{sign}(\bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon})_{LR} \tag{23}$$

其中 $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$ 为一极小量。

对(20) 式其进行有界闭模糊数转化可得到：

$$(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(K_{ij})\mathrm{sign}(X_j)[-(|K_{ij}| X_j^L + |X_j| K_{ij}^L), (|K_{ij}| X_j^R + |X_j| K_{ij}^R)] + (1-\lambda^2)\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(K_{ij})\mathrm{sign}(X_j)[\min(-K_{ij}^L X_j^R, -K_{ij}^R X_j^L), \max(K_{ij}^L X_j^L, K_{ij}^R X_j^R)]\} = \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(\lambda_i)\mathrm{sign}(X_j) \cdot [-(|\lambda_i| m_{ij} X_j^L + |X_j| \lambda_i^L m_{ij}), (|\lambda_i| m_{ij} X_j^R + |X_j| \lambda_i^R m_{ij})]\} + (1-\lambda)^2 \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(\lambda_i m_{ij})\mathrm{sign}(X_j) \cdot [\min(-\lambda_i^L m_{ij} X_j^R, -\lambda_i^R m_{ij} X_j^L), \max(\lambda_i^L m_{ij} X_j^L, \lambda_i^R m_{ij} X_j^R)]\} \tag{24}$$

其中 $\lambda \propto (0,1), X_j^L, X_j^R, \lambda_i^l, \lambda_i^R \geqslant 0. \ i = 1,2,\cdots n$

即可转化为：

$$\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(K_{ij}\mathrm{sign}(X_j)[-(|K_{ij}| X_j^L + |X_j| K_{ij}^L), (|K_{ij}| X_j^R + |X_j| K_{ij}^R)]\} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(K_{ij})\mathrm{sign}(X_j)[\min(-K_{ij}^L X_j^R, -K_{ij}^R X_j^L), \max(K_{ij}^L X_j^L, K_{ij}^R X_j^R)]\} = \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(\lambda_i)\mathrm{sign}(X_j)[-(|\lambda_i| m_{ij} X_j^L + |X_j| \lambda_i^L m_{ij}), (|\lambda_i| m_{ij} X_j^R + |X_j| \lambda_i^R m_{ij})]\} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(\lambda_i)\mathrm{sign}(X_j) \cdot [\min(-\lambda_i^L m_{ij} X_j^R, -\lambda_i^R m_{ij} X_j^L), \max(\lambda_i^L m_{ij} X_j^L, \lambda_i^R m_{ij} X_j^R)]i\} \quad i = 1,2,\cdots n. \tag{25}$$

对(23) 式进行有界闭模糊数转化可得：

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(X_i)\mathrm{sign}(X_j)[-(|X_i| m_{ij} X_j^L + |X_j| m_{ij} X_i^L), |X_i| m_{ij} X_j^R + |X_j| m_{ij} X_i^R)]\} + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{\mathrm{sign}(X_i)\mathrm{sign}(X_j)[\min(-X_i^L m_{ij} X_j^R, -X_i^R m_{ij} X_j^L), \max(X_i^L m_{ij} X_j^L, X_i^R m_{ij} X_j^R)]\} = (\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) \tag{26}$$

显然(19) 式与(22) 式合成普通特征值问题，可以通过子空间迭代法等来求解。

式(25) 与(26) 合成模糊特征值问题，是区间方程，可以利用区间数的运算法则，将每一个区间方程化为两个普通方程，即可化为如下$(2n+2)$ 个普通方程：

$$\begin{cases} f_1(X_1, X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_1 \\ f_2(X_1, X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{2n-1}(X_1, X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_{2n-1} \\ f_{2n}(X_1, X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_{2n} \\ f_{2n+1}(X_1 X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_{2n+1} \\ f_{2n+2}(X_1, X_2, \cdots X_{2n+1}, X_{2n+2}) = g_{2n+2} \end{cases} \quad (27)$$

其中：

$$X_{2i-1} = X_i^L, X_{2i} = X_i^R, X_{2n+1} = \lambda_i^L,$$
$$X_{2n+2} = \lambda_i^R \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

## 4 结　语

在前人的研究基础上对模糊动力系统进行了研究，并对模糊动力平衡方程进行了求解，对实际工程分析有着一定的价值。但对模糊平衡方程的更精确和有效的解法一直是人们所期待的。这也将是今后的研究方向。

**参考文献：**

[1] 吕恩琳，模糊随机结构有限元平衡方程的摄动解法[J]. 应用数学和力学，1997(8):631－638.

[2] 吕恩琳. 结构模糊有限元平衡方程的一种新解法[J]. 应用数学和力学，1997(4):361－366.

[3] 杨绿峰，李桂青. 基于二阶小参数摄动法的模糊有限元[J]. 工程力学，1998 增刊，276－279.

[4] [法]D. 杜布瓦，H. 普哈德，模糊集与模糊系统[M]. 江苏科学技术出版社，1987.

[5] O. C. Zienkiewixz. The Finite ElementMethod[M]. McGraw Hill, Inc. , 1977

[6] K. J. BATHE. Finite Element Procedures in Engineering Analysis[M]. Prentice - Hall, Inc. , Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.

# Establishment and Solving Method of Fuzzy Dynamic Finite Balance Equation

*SONG Xiao-bao*

(1. College of Resource and Environmental Sciences, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract**: In consideration of the fuzziness of some boundary conditions, environmental media and especially some load in the analysis of engineering structure, in order to solve the actual questions in engingeering, the fuziness must be taken into account. Only so , the solution can be close to its reality. In the basis of Zadeh's Extention Theory and Delonbell's Theory, fuzzy vibration equation can be deduced, then fuzzy finite balance equation through integrating the common finite element method. Based on the $L-R$ fuzzy nember and $L-R$ fuzzy function, and by making using of the character of the $L-R$ fuzzy nember and interzone equation, the FFE equation can be trasformed into a set of common equations and a set of interzone equations. The interzone equation can be solved by the character of interzone, thus the equation's solution can be solved.

**Key words**: fuzziness; FFE; $L-R$ fuzzy number; dynamic balance equation

（编辑　刘道芬）