

文章编号:1000-582X(2003)09-0053-03

# 空间机构自由度计算\*

张于贤<sup>1</sup>, 陈德淑<sup>2</sup>, 廖振方<sup>2</sup>, 王红<sup>1</sup>

(1. 桂林电子工业学院, 桂林 541004; 2. 重庆大学机械工程学院, 重庆 400030)

**摘要:**从四杆机构具有灵活性和平面机构任意封闭图形具有3个约束的理论出发,对机构学的自由度公式进行了研究。研究表明:只要对平面、球面机构自由度的计算公式稍加变化,推导出空间机构求自由度的新公式。利用这个新公式,既可以求空间机构的自由度,又可以求平面、多环、空间开式链、混合链等机构的自由度。它比传统公式使用简便,在形式和内容上都有实际意义,从而为空间机构自由度的计算提供了可靠的理论计算式。

**关键词:**空间机构; 自由度; 约束数封闭环数  
**中图分类号:**TH112

**文献标识码:**A

关于空间机构自由度计算公式的研究,国内发表的论文不多,国际上 Hunt、Daffy、Fichter 和 Tesser 等人对机构学空间机构的分类做了比较深入的研究<sup>[1]</sup>,但对空间机构杆件运动的本质规律研究仍还不够。为此,国内出版的各种教材和设计手册中关于空间机构自由度计算公式很多,多达34个,有的公式在使用中还要计算公共约束数  $m$ ,使用起来很不方便;有的公式求空间机构自由度还经常出现错误。为此,作者深入研究了平面机构求自由度的公式结构,在此基础上扩展到空间机构求自由度的计算公式,通过运动副总自由度数,多余自由度、约束数、环数4个概念,找到了解决构件运动的本质规律,从而使空间机构自由度的计算十分简便、可靠。

## 1 空间机构自由度计算公式的回顾

众所周知,传统的空间机构自由度计算公式有34个,这里只列举两例。

### 1.1 常用的空间机构单封闭环自由度计算公式<sup>[2]</sup>

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k \quad (1)$$

式中:  $W$ —机构的自由度;  $m$ —机构各构件在运动时所受到的公共约束数( $m$ 的值可依次取0、1、2、3及4);  $n$ —机构的活动构件数;  $P_k$ —机构的  $k$ 类运动副的数量;  $k$ —机构运动副的配合级别,由运动副产生的约束数决定,其数值  $k = 5, 4, 3, 2, 1$

### 1.2 空间机构不含公共约束的自由度的计算公式为<sup>[3]</sup>

$$W = 6(n - 1) - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5 \quad (2)$$

式中:  $n - 1$ —可动构件数;  $P_1 \sim P_5$ —I ~ V级运动副的数目

## 2 重新建立空间机构自由度计算公式的理由

传统的空间机构自由度计算公式太多,计算过程复杂。现有的34个公式适用范围窄且常出错误。例如,计算图1所示空间机构的自由度,由公式(1)得:

$$\begin{aligned} W &= (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k = \\ &= (6 - 3) \times 5 - [(5 - 3) \times 5 + \\ &= (4 - 3) \times 1 + (3 - 3) \times 1] = 4 \end{aligned}$$

由公式(2)得:

$$\begin{aligned} W &= 6(n - 1) - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5 = \\ &= 6 \times 5 - 5 \times 5 - 4 \times 1 - 3 \times 1 = -2 \end{aligned}$$

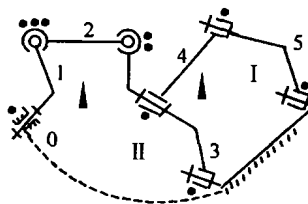


图1 RSS'-4R空间机构

由此可见,直接利用两个公式得到的两个结果都是不正确的。由于公式(1)只适用于单封闭环,所以其结果等于4显然是错误的。而用后面所建立的公式(3)计

\* 收稿日期:2003-05-03

作者简介:张于贤(1967-),男,桂林电子工业学院讲师,重庆大学博士生,主要研究领域:机械设计及理论。

算图1所示机构的自由度得  $W = P_2 - \lambda - 3N = 10 - 3 - 3 \times 2 = 1$ , 这个计算结果是正确的。

### 3 建立空间机构自由度公式应遵循的几个原则

#### 3.1 多余自由度的等值覆盖原则

在重新建立空间机构自由度计算公式时,用多余自由度这个等值概念去覆盖传统的虚约束多余自由度、滚轮局部多余自由度、移动副  $P$  的刚化多余自由度和新提出的结构多余自由度、级别配合多余自由度,从而给空间机构自由度的计算赋予了新的内涵,使空间机构自由度的计算抓住了问题的实质,找到了解决问题的方法,从而避免和减少了有关空间机构自由度计算的一些不必要的旧概念。也就是说,在原平面机构自由度计算式中,再减去多余自由度  $\lambda$  这一项,就得到了空间机构求自由度的新公式,其表示式为:

$$W = P_2 - \lambda - 3K \quad (3)$$

式中:  $W$ —空间机构的自由度;  $P_2$ —空间机构运动副自由度总数;  $\lambda$ —空间机构运动副的多余自由度数;  $3$ —空间机构每个封闭环的约束数,或者说它是独立位移方程数及条件约束数;  $K$ —空间机构的封闭环数(在图上用黑三角形表示)。

#### 3.2 多余自由度的弥补原则

在空间机构中,由于轴线的倾斜,势必造成倾斜轴上倾斜安装的圆盘在回转中发生位移变化,由于这种位移变化要求空间机构有多余的自由度来随之转动或移动,以弥补两轴彼此之间因倾斜交错造成的位移变化和空间机构在不同平面上运动质点的位移变化。如果没有这种级别配合多余自由度运动副来调节,空间机构的运动可能卡死不动。这就失去了空间机构设计的目的。所以说多余自由度,在空间机构设计中决不是多余的,而是必须的。

#### 3.3 自由度级别配合点化原则

由于可以将空间机构平面表示或等值球面  $4R$  表示<sup>[4]</sup>,加上运动副配合级别自由度点化原则,就可以很快求出空间机构的自由度。

#### 3.4 新公式的简化原则

在传统的空间机构自由度计算公式中,最麻烦的就是要确定空间机构的公共约束数,用式(1)计算空间机构的自由度,关键在于判断独立的约束条件数  $m$ ,通过写运动方程式,用系数矩阵的秩来计算公共约束数的方法来判断,这项工作很复杂。用式(3)计算空间机构的自由度就可替代原来的34个计算公式。取消原来的公共约束数  $m$ 、消极约束、消极自由度、过约束、虚约束、多余约束、约束总数、作图定位法求自由度<sup>[5]</sup>、封闭环割断机架法求自由度等概念,从而简化了计算过程,提高了计算的可靠性。

## 4 采用新公式计算空间机构自由度时要注意的几点

#### 4.1 5杆或5杆以上球面机构不允许出现相对移动

由于移动  $P$  的两构件之间的相对移动在五杆或五杆以上球面机构或等值球面机构里是不允许的<sup>[6]</sup>,所以空间机构中移动副应被约束刚化成不能运动的构件。这个结论只适用于5杆以上(含5杆)空间机构自由度的计算。

#### 4.2 空间机构与平面机构的联系与区别

众所周知,平面机构的平行轴如果制造误差过大,机构就不能转动。否则,这“刚化”的连杆机构就会弯曲和扭曲,在轴承中产生载荷,如果这些平行轴承与轴采用动配合,构件又较长,补偿构件销轴之间微小不平行的方法是采用球面轴承,允许三维转动,这样的平面机构就成了低度的空间机构<sup>[7]</sup>。所以说平面机构、球面机构是空间机构的特例。虽然空间机构可以表示为平面图形和等值的  $4R$  球面机构。但不能任意应用平面几何公式求解各种角度。所以在计算空间机构自由度时,要注意平面机构与空间机构的联系与区别。

#### 4.3 合理应用空间机构的对称性

在判断空间机构由对称性的构件和零件构成时,在不影响运动的传递时,去掉一个对称零件或一组对称结构,空间机构就可以顺利求解。对于万向节十字轴,要注意十字轴4个铰链轴线交于一点,十字轴有两个平面方程,两平面方程的交线确定一个铰链的原则<sup>[8]</sup>。

## 5 新旧公式求空间机构自由度的应用举例

例:求图1所示空间机构的自由度。

1) 用式(3)求:

从图上一目了然地看到该机构运动副总自由度数  $P_2 = 10$ (10个黑点),从图上又看到空间机构的多余自由度在  $SS'$  上共有三个,即  $\lambda = 3$ ,将机架  $0-0$  用虚线连起来(即封闭起来),得到两个封闭环( $0-1-2-3-0$  和  $0-3-4-5-0$ ),说明  $K = 2$ ,代入式(3)得:

$$W = P_2 - \lambda - 3K = 10 - 3 - 3 \times 2 = 1$$

说明用式(3)计算图1所示空间机构的自由度比用传统公式计算方便、快捷。

2) 用传统公式(或称旧公式)求:

由图1可知,该机构有两个封闭环,即  $0-1-2-3-0$  构成的单封闭环,  $\lambda_1^* = 6$ ; 由  $0-3-4-5-0$  构成的  $4R$  单封闭环,封闭环约束数  $\lambda_2^* = 6 - m = 6 - 3 = 3$ ,所以:

$$W = P_1 + 2P_2 + 3P_3 - \sum (\lambda_1^* + \lambda_2^*) = 5 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 - (6 + 3) = 1$$

式中: $\lambda_1^*$ —封闭环 I 的约束条件数, $\lambda_2^*$ —封闭环 II 的约束条件数,

3) 用传统公式(1)求:

$n = N - 1$  (式中  $N$  为含机架在内的杆件数)

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k = \\ (6 - 3) \times 5 - [(5 - 3) \times 5 + \\ (4 - 3) \times 1 + (3 - 3) \times 1] = 4$$

所以,用传统公式(1)计算的自由度显然是不正确的。

## 6 结 论

1) 通过对空间机构自由度计算公式的研究,证明新公式计算速度快、效率高。同时还发现运动副自由度的总数  $P_s$ 、多余自由度  $\lambda$ 、闭环数  $K$ 、约束数 4 个参数是构成公式最主要的技术参数,也是解决空间机构自由度计算公式的关键参数。

2) 将移动副运用于 5 杆以上(含 5 杆)球面机构是不允许的,必须将移动副自由度刚化,这一说法不仅适用于单环空间机构,而且也适用于多环空间机构即等值球面机构。

3) 提出级别多余自由度和结构多余自由度两个新概念,由于这两个新概念的引入,才使空间机构自由度的计算有了可靠依据。另外,还提出了不计算公共约束数的概念,这给计算空间机构带来了极大的方便性

和简捷性。

4) 公式(3)具有广泛的适用性,不仅适用于单环空间机构、多环空间机构,还适用于开式链空间机构,去掉公式中的  $\lambda$  又可以作为平面机构自由度的计算公式,避免了由于对原有公式选择不当而出现计算错误,从而使公式(3)既具有实用价值,又具有一定的理论指导意义。

## 参考文献:

- [1] [苏]柯热夫尼柯夫 C. H, 机构参考手册[M]. 北京:机械工业出版社,1988.
- [2] 傅则绍. 机构设计学[M]. 成都:成都科技大学出版社,1988.
- [3] 李学荣. 四连杆机构综合概论(第一册)[M]. 北京:机械工业出版社,1985.
- [4] 机械工程手册编辑委员会. 机构选型与运动设计(第18篇)[M]. 北京:机械工业出版社,1979.
- [5] 黄真. 空间机构学[M]. 北京:北京机械工业出版社,1991.
- [6] 天津大学等六所大学主编. 机械原理(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,1979.
- [7] 白师贤. 高等机构学[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.
- [8] 徐灏. 机械设计手册(第二卷)[M]. 北京:机械工业出版社,1998.

## Exploration on the Formula of Degree of Freedom of Space Mechanism

ZHANG Yu-xian<sup>1</sup>, CHEN De-shu<sup>2</sup>, LIAO Zhen-fang<sup>2</sup>, WANG Hong<sup>1</sup>

(1. GuiLi Institute of Electronical Industry, Guilin 541004, China;

2. College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** From the theory that four-connecting rods mechanism has flexibility and any closed graphics of plane mechanism has three restrictions, the calculating formula of degree of freedom of mechanism is researched. The result of research indicate that the calculating formula of degree of freedom of space mechanism will be set up if the calculating formula of degree of freedom of plane and spherical surface mechanism are changed a little. The new formula could substitute for 29 traditional calculating formulas of degree of freedom of space mechanism but also the plane mechanism, the multiple rings space mechanism, the open chain space mechanism and mixed chain space mechanism and so on. Because that the new formula is easier and rapider in use than traditional formulas, it is a reliable theoretical calculating formula for calculating degree of freedom of space mechanism.

**Key words:** space mechanism; degree of freedom; number of restrictions; number of closed rings

(编辑 成孝义)