

文章编号:1000-582X(2004)10-0040-04

# 小波变换在信号消噪中的应用\*

彭燕妮<sup>1,2</sup>

(1. 重庆大学自动化学院, 重庆 400030; 2. 重庆工商大学计算机与信息工程学院, 重庆 400033)

**摘要:**小波变换是近十年来迅速发展起来的学科,与 Fourier 变换相比,是一个时间和频率的局部变换。它的主要特点是将信号表示为不同尺度和不同位置的基本单元,而不同的基本单元表示原始信号中的不同信息成分,这种特点使小波变换成为一种高效的信号处理工具。讨论了小波变换消噪原理,通过对信号仿真分析,表明了小波变换在信号消噪应用中的有效性。

**关键词:**小波变换;小波包;消噪

**中图分类号:**TN911.7

**文献标识码:**A

通信系统中的有用信号总是与噪声伴随存在,而广泛存在的噪声在环境情况恶劣时,有时甚至会比信号还要强。传统常用的消噪办法是基于 Fourier 变换理论的“滤波法”,即让信号通过相应的低通滤波器或带通滤波器,滤除信号的带外噪声。不难看出,这种方法固然简单,但不足之处在于对存在于信号带内的噪声无能为力。而且在滤波器的具体实现过程中也存在一些非理想因素,影响实际结果。

近年来发展成熟的小波技术已成功应用于各个领域,如信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、地震波分析和量子物理等众多领域中。在信号消噪应用中,小波技术体现了传统方法没有的优越性,利用小波变换的“数学显微镜”特性,能有效地从混合信号中提取出有用信号。

## 1 小波消噪的原理

### 1.1 小波变换

在平方可积的实数空间  $L^2(R)$  中,设一个函数  $\psi(t)$  的 Fourier 变换为  $\Psi(\omega)$ ,允许条件(Admissible Condition)为  $C_\psi = \int_R \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ ,满足上式的  $\psi(t)$  称为基本小波或母小波(Mother Wavelet),简称小

波。由于  $\psi(t)$  时正时负地波动,并且持续时间短,故称之为“小波”。

将母小波  $\psi(t)$  伸缩和平移之后得到的函数族称为分析小波:

其连续形式为

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in R^+, b \in R$$

离散形式为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n) \quad m, n \in Z$$

对任一函数  $f(t) \in L^2(R)$

连续小波变换定义为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{R^2} \frac{1}{a^2} W_f(a,b) \psi_{ab}(t) da db$$

二进制离散小波变换为

$$W_{2^j} f(x) = \frac{1}{2^j} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{x-t}{2^j}\right)} dt$$

如果小波  $\psi(t)$  满足  $A \leq \sum_{k=Z} |\Psi(2^{-k}\omega)|^2 \leq B$ ,其中  $A, B$  为常数,则一定存在重构小波  $\chi(t)$  使得

\* 收稿日期:2004-05-23

基金项目:2002年重庆市应用基础研究资助项目(7369);国家教育部博士点基金资助项目(98061117)

作者简介:彭燕妮(1972-),女,重庆人,重庆工商大学讲师,硕士,主要研究方向为计算机网络在通信中的应用。

$$f(t) = \sum_{j \in Z} W_{2^j} f * \chi_{2^j}(t).$$

### 1.2 多尺度分析(Multi-Resolution Analysis, MRA)

多尺度分析的基本思想是构造一系列相继的线性空间  $V_m, m \in Z$  表示不同的分辨率,  $V_m$  是在分辨率为  $2^m$  时对  $L^2(R)$  的逼近。分辨率越高, 逼近程度越高。具体来说, 对任意  $f(x) \in L^2(R)$ , 其分辨率为  $2^m$  时的逼近信号  $f_{A_m}(x) \in V_m$ , 分辨率越高,  $f_{A_m}(x)$  对  $f(x)$  的逼近程度越高。

根据 Mallat 分解算法, 对尺度函数  $\phi(x)$  和小波函数  $\psi(x), \phi(x), \psi(x) \in L^2(R)$ , 它们对应的 Fourier 变换分别为  $\Phi(\omega), \Psi(\omega)$  令

$$\phi_{mn}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m x - n) \quad \psi_{mn}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - n) \\ m, n \in Z$$

任一能量有限信号  $f(x)$  可分解不同分辨率的逼近信号  $a_m(n)$  和细节信号  $d_m(n)$

$$\begin{cases} a_m(n) = \sum_k h(k - 2n) a_{m+1}(k) \\ d_m(n) = \sum_k g(k - 2n) a_{m+1}(k) \end{cases}$$

式中 
$$\begin{cases} h(n) = 2^{\frac{1}{2}} \int_R \phi(x) \phi(2x - n) dx \\ g(n) = 2^{\frac{1}{2}} \int_R \psi(x) \phi(2x - n) dx \end{cases}$$

且  $\Psi(\omega) = G(\frac{\omega}{2}) \Phi(\frac{\omega}{2}), G(\omega) = \pm e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$ ,

$H(\omega)$  为  $h(n)$  的 Fourier 变换。

设原始数据对应分辨率参数  $m = 0$ , 记为  $a_0(n)$ , 按分解算法逐次降低分辨率将信号分解成为逼近信号和细节信号, 并且每一次都是对相邻高分辨率的逼近信号进行分解得到低一级分辨率的逼近信号和细节信号。

可用图 1 表示如下:

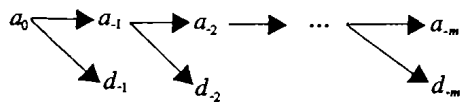


图 1 多尺度信号分解

如果  $a_0$  有  $N$  个样本, 将它分解成  $a_{-1}$  和  $d_{-1}$ , 由于滤波后取偶数样本, 故  $a_{-1}$  和  $d_{-1}$  各为  $N/2$  个样本, 总样本数仍为  $N$  个。在分辨率为  $2^m$  时,  $a_m$  和  $d_m$  各有  $2^m N$  个样本, 全部分解得到的离散信号总共仍只有  $N$  个样本。

从应用的角度来看, 通信系统中传送的有用信号一般相关性较强, 不会出现突变, 而细节信号是高频突变信号, 属于噪声; 逼近信号是低频部分, 就是对原信号消除噪声后的有用信号。经适当的多次分解, 就可

以将逼近信号作为消噪之后的信号。

### 1.3 小波包分析

沿用前面定义的尺度函数  $\phi(x)$  和小波函数  $\psi(x)$ , 定义一系列递归函数如下

$$\begin{cases} W_{2n}(t) = \sqrt{2} \sum h_k W_n(2t - k) \\ W_{2n+1}(t) = \sqrt{2} \sum g_k W_n(2t - k) \end{cases}$$

由此递归函数所确定的  $\{W_n(t)\}_{n \in N}$  就是由  $W_0 = \phi$  所确定的小波包。

对信号空间  $L^2(R)$  作小波包分解时, 有

$$L^2(R) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus U_0^2 \oplus U_0^3 \dots$$

即小波包分解与多尺度分解的不同之处就在于不仅要 对尺度函数空间进行分解, 同时也要对小波包空间进行分解。

从上面的分析可知, 在信号的多尺度分析中, 总是对信号的低频部分进行分解, 而没有对高频部分进行进一步的分解, 所以信号的多尺度分析是一个不完整的树状结构, 如图 1 所示。当信号本身包含有高频分量时, 会丢失掉这些频率成分。而对信号进行小波包分析时, 不仅对信号的低频部分进行分解, 同时也对高频部分进行分解。所以, 信号的小波包分析是一个完整的树状结构, 如图 2 所示。不难看出, 小波包分析比多尺度分析更精细。当然, 其计算复杂性更高, 计算量更大。

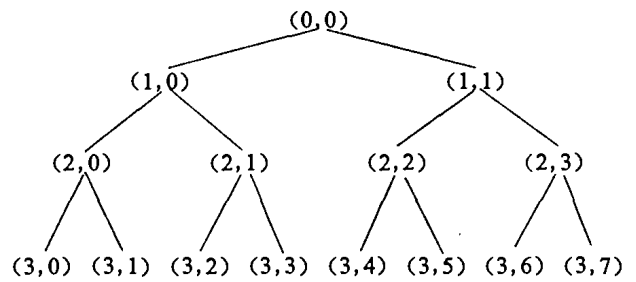
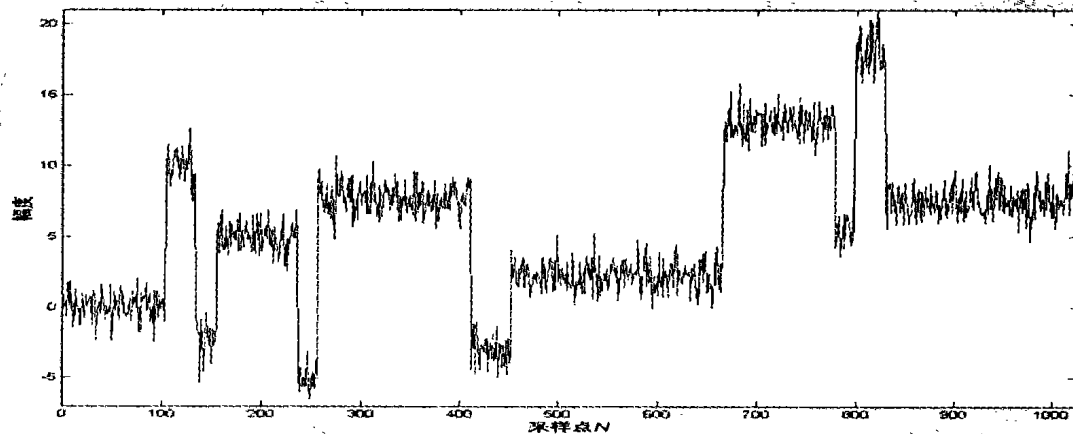


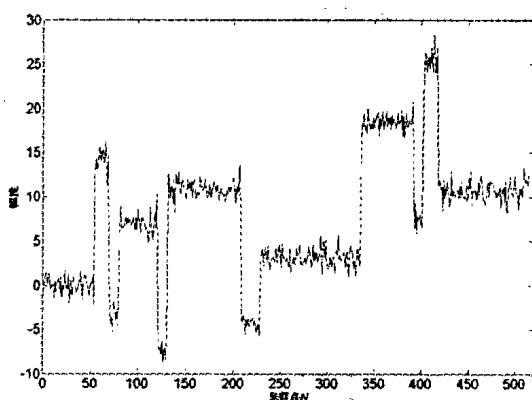
图 2 信号的小波包分析

## 2 仿真分析

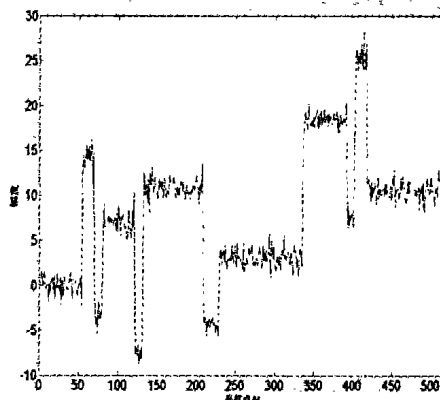
在本次仿真实验过程中, 采用 MATLAB6.1 提供的一个包含噪声的信号 noisbloc, 选用“db 4”小波, 分别对其进行 level 为 3 的连续小波分解消噪和小波包分解消噪, 得到各次分解结果输出波形如图 3 所示。对每一次小波变换, 都提取其中的“逼近信号”作为下次变换的输入, 同时忽略掉其中的“细节信号”, 也即清除一次信号中包含的高频噪声分量。3 次变换后的输出信号与原始信号相比, 噪声起伏明显改善。小波包变换过程类似, 只是在分解时, 是对信号进行完整分解, 并不损失高频分量, 在消噪的同时, 更多地保留了细节信息。



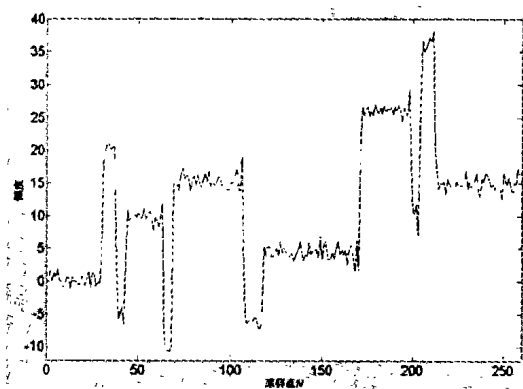
(a)原始信号 noisbloc



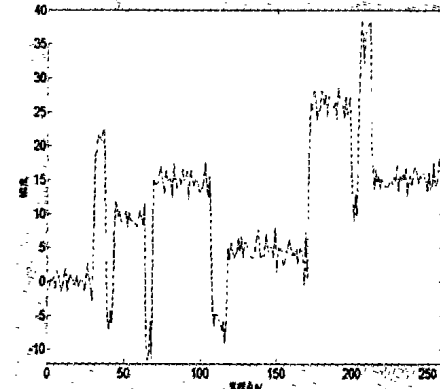
(b)小波分解 1 次后的逼近信号



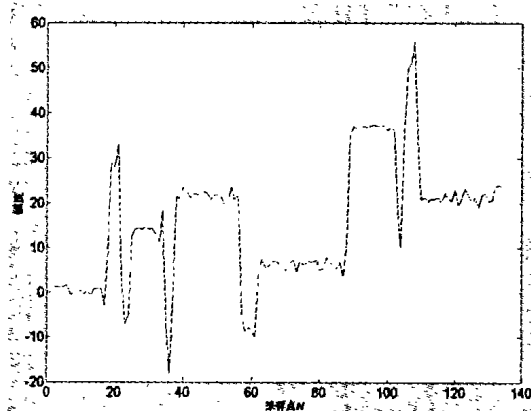
(c)小波包分解 1 次后的逼近信号



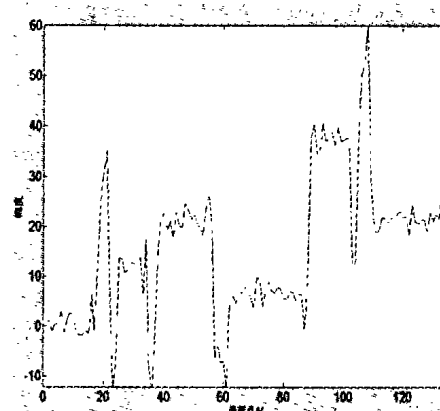
(d)小波分解 2 次后的逼近信号



(e)小波包分解 2 次后的逼近信号



(f)小波分解 3 次后的逼近信号



(g)小波包分解 3 次后的逼近信号

图3 仿真运行输出波形

从仿真图形结果可见,通过分解运算,信号中的噪声分量被逐次从信号中去掉。小波分解与小波包分解都能将信号中的噪声有效消除,而小波包分解能保留更多的高频分量在逼近信号中。本次仿真应用中,保留了低频成分作为有用信号,但可以想象,如果留下细节信号,则能够提取出信号中的突变成分,检测出信号中存在的奇异值,而这也正是小波分析的另一重要应用。

#### 参考文献:

[1] 秦前清,杨宗凯.实用小波分析[M].西安:西安电子科

技大学出版社,1994.

- [2] 刘伟,龙琼,刘光斌.基于奇异性的小波消噪技术[J].现代雷达,2002,24(6):56-59.
- [3] 李传庆,徐敏,张曙.基于小波分析的信号消噪法[J].应用技术,2003,30(2):14-17.
- [4] 程正兴.小波分析算法与应用[M].西安:西安交通大学出版社,1998.
- [5] 李建平,唐远炎.小波分析方法的应用[M].重庆:重庆大学出版社,1999.
- [6] 胡昌华.基于MATLAB的系统分析与设计——小波分析[M].西安:西安电子科技大学出版社,1999.

## Application of Wavelet Transform to De-noising Method

PENG Yan-ni<sup>1,2</sup>

(1. College of Automation Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Computer Science and Information Engineering College, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400033, China)

**Abstract:** The wavelet transform is a new subject developed quickly in the past ten years. Compared with the Fourier transform, the wavelet transform is a part of time-frequency transform. The most important character is that it can be used to transform a signal into basic units at different scales and location, each unit represents a component of original signal difference from others. The wavelet transform has been proven to be a powerful and efficient tool for processing signal due to this character. This paper introduces the de-noising principles of the wavelet transform. It is proved to be an effective method by the simulating analysis.

**Key words:** wavelet transform; wavelet package; de-noise

(编辑 张 苹)