文章编号:1000-582X(2004)11-0071-03

一类新的广义非线性变分包含*

金茂明
(涪陵师范学院,数学系,重庆 408003)

摘 要:引入和研究了一类新的含极大 η-单调映名胜的广义非线性变分包含,在 Hilbert 空间中利用极大 η-单调映象的预解算子技巧,构造了求解这类变分包含解的迭代算法,并讨论了由此算法生成的迭代序列的收敛性。其所得结果是近期相关结果的改进和扩充。

关键词:变分包含;极大 η-单调映象;预解算子;算法;收敛性
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A

1 引言与预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$,2^H 表示 H 的一切非空子集族,$CB(H)$ 表明 H 的所有非空有界闭子集族,$H(\cdot,\cdot)$ 表示 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 度量。令 $A,B,C: H\to 2^H$ 是集值映象,$p,g,m: H\to H$,$\eta: H\times H\to H$ 和 $N: H\times H\times H\to H$ 是单值映象,$M: H\times H\to 2^H$ 使得对每一固定的 $z\in H$,$M(\cdot,z): H\to 2^H$ 是极大 η-单调映象,且对每一固定的 $z\in H$,$\mathrm{Range}(g-m)\cap \mathrm{dom}M(\cdot,z)\neq\phi$。则寻求 $u\in H,x\in Au,y\in Bu$ 和 $z\in Cu$ 使得 $g(u)-m(u)\in \mathrm{dom}(M(\cdot,z))$ 和

$$0\in N(p(u),x,y)+M(g(u)-m(u),z) \quad (1)$$

的问题称为广义的非线性隐拟变分包含。

易见,通过适当选择映象 η,N,M,p,g,m,A,B,C 和空间 H,若干熟知的变分包含问题都可通过问题(1)得到[1-5]。

本文目的是利用极大 η-单调映象的预解算子方法构造了变分包含问题(1)的逼近解算法,并讨论了由此算法生成的迭代序列的收敛性。其所得结果是文献[1-5]中相应结果的改进和推广。

定义 1 映象 $g: H\to H$ 称为

i) α-强单调的,如果存在 $\alpha>0$ 使得 $\langle g(u)-g(v),u-v\rangle\geq\alpha\|u-v\|^2$, $\forall u,v\in H$;

ii) β-Lipschitz 连续的,如果存在 $\beta>0$ 使得 $\|g(u)-g(v)\|\leq\beta\|u-v\|$, $\forall u,v\in H$。

定义 2 设 $p:H\to H$ 是一单值映象,映象 $N:H\times H\times H\to H$ 称为

i) 对第一变元关于 p 是 γ-强单调的,如果存在 $\gamma>0$ 使得 $\langle N(p(u),\cdot,\cdot)-N(p(v),\cdot,\cdot),u-v\rangle\geq\gamma\|u-v\|^2$, $\forall u,v\in H$;

ii) 对第一变元是 ξ-Lipschitz 连续的,如果存在 $\xi>0$ 使得 $\|N(u,\cdot,\cdot)-N(v,\cdot,\cdot)\|\leq\xi\|u-v\|$, $\forall u,v\in H$。类似,可定义 $H(\cdot,\cdot,\cdot)$ 对第二或第三变元的 Lipschitz 连续性。

定义 3 映象 $A:H\to CB(H)$ 称为 α-Lipschitz 连续的,如果存在 $a>0$ 使得 $H(Au,Av)\leq a\|u-v\|$, $\forall u,v\in H$。

定义 4 映象 $\eta:H\times H\to H$ 称为

i) 单调的,如果 $\langle u-v,\eta(u,v)\rangle\geq 0$, $\forall u,v\in H$;

ii) 严格单调的,如果 $\langle u-v,\eta(u,v)\rangle\geq 0$, $\forall u,v\in H$ 且等式成立 $\Leftrightarrow u=v$;

iii) δ-强单调的,如果存在 $\delta>0$ 使得 $\langle u-v,\eta(u,v)\rangle\geq\delta\|u-v\|^2$, $\forall u,v\in H$;

iv) τ-Lipschita 连续的,如果存在 $\tau>0$ 使得 $\langle u-v,\eta(u,v)\rangle\leq\tau\|u-v\|$, $\forall u,v\in H$。

定义 5 设 $\eta:H\times H\to H$ 是一单值映象,映象 $M:H\to 2^H$ 称为

i) η-单调的,如果 $\langle x-y,\eta(u,v)\rangle\geq 0$, $\forall u,v\in u,v\in H,x\in Mu,y\in Mv$;

* 收稿日期:2004-06-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69903012);重庆市教委科学技术研究资助项目(021301)
作者简介:金茂明(1963-),男,重庆涪陵人,涪陵师范学院副教授,主要从事非线性泛函分析研究。

ii) 极大 η - 单调的,如果 M 是 η - 单调的且 $(I+\lambda M)(H)=H$,其中,I 是 H 上的恒等映象,$\lambda>0$ 为常数。

引理 1[1] 设 $\eta:H\times H\to H$ 是严格单调映象,$M:H\to 2^H$ 是极大 η - 单调映象,则对任意 $\lambda>0$,逆映象 $(I+\lambda M)^{-1}$ 是单值的。

由引理 1,能够定义极大 η - 单调映象的预解算子

$$J_\rho^M(z)=(I+\rho M)^{-1}(z),\forall z\in H$$

其中 $\rho>0$ 是常数,$\eta:H\times H\to H$ 是严格单调映象。

引理 2[1] 设 $\eta:H\times H\to H$ 是 δ - 强单调的和 τ - Lipschitz 连续的,$M:M\to 2^H$ 是极大 η - 单调的,则 M 的预解算子 J_ρ^M 是 Lipschitz 连续的,即 $\| J_\rho^M(u)-J_\rho^M(v)\|\leqslant\frac{\tau}{\delta}\|u-v\|,\forall u,v\in H$。

2 迭代算法

引理 3 $(u,x,y,z)\in H\times H\times H\times H$ 是问题(1)的解当且仅当存在 $u\in H,x\in Au,y\in Bu$ 和 $z\in Cu$ 使得

$$g(u)=m(u)+J_\rho^{M(\cdot,z)}(g(u)-m(u)-\rho N(p(u),x,y))\qquad(2)$$

其中 $\rho>0$ 为常数,$J_\rho^{M(\cdot,z)}=(I+\rho M(\cdot,z))^{-1}$。

证明 直接从 $J_\rho^{M(\cdot,z)}$ 的定义可得到引理 3 成立。

注 1 由引理 3 知,问题(1)等价于不动点问题(2)。方程(2)能被改写为

$$u=u-g(u)+m(u)+J_\rho^{M(\cdot,z)}(g(u)-m(u)-\rho N(p(u),x,y))\qquad(3)$$

此不动点陈述和 Nadler[6] 可被用来建立下面的近似点算法:

算法 1 对任意给定的 $u_0\in X,x_0\in Au_0,y_0\in Bu_0$ 和 $z_0\in Cu_0$ 定义迭代序列 $\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 如下:对一切 $n\geqslant 0$ 和 $0<\lambda\leqslant 1$

$$\begin{cases} u_{n+1}=(1-\lambda)u_n+\lambda[u_n-g(u_n)+m(u_n)+J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_n)-m(u_n)-\rho N(p(u_n),x_n,y_n))] \\ x_n\in Au_n,\ \|x_n-x_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(Au_n,Au_{n+1}) \\ y_n\in Bu_n,\ \|y_n-y_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1}H)(Bu_n,Bu_{n+1}) \\ z_n\in Cu_n,\ \|z_n-z_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(Cu_n,Cu_{n+1}) \end{cases}\qquad(4)$$

3 收敛性

定理 1 设 H 是实 Hilbert 空间,$\eta:H\times H\to H$ 是 δ - 强单调和 τ - Lipschitz 连续,$g:H\to H$ 是 α - 强单调和 β - Lipschitz 连续,$m:H\to H$ 是 ζ - Llipschitz 连续,$p:H\to H$ 是 κ - Lipschitz 连续,$N:H\times H\times H\to H$ 对第一、第二、第三变元分别是 δ、ξ 和 ν - Lipschitz 连续,且 N 对第一变元关于 p 是 γ - 强单调的,$A,B,C:H\to CB(H)H$ - Lipschitz 连续,且 Lipschitz 常数分别为 a,b 和 c。设 $M:H\times H\to 2^H$ 是一集值映象且对 $\forall z\in H,M(\cdot,z):H\to 2^H$ 是极大 η - 单调映象,如果存在常数 $\rho>0$ 和 $\mu>0$ 使得对 $\forall x,y,z\in H$ 有

$$\|J_\rho^{M(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{M(\cdot,y)}(z)\|\leqslant\mu\|x-y\|,\qquad(5)$$

$$h=(1+\frac{\tau}{\delta})\sqrt{1-2\alpha+\beta^2}+(1+\frac{\tau}{\delta})\zeta+\frac{\tau}{\delta}\sqrt{1-2\rho\gamma+\rho^2\sigma^2\kappa^2}+\rho\frac{\tau}{\delta}(a\xi+b\nu)+\mu c<1\qquad(6)$$

则由算法 1 生成的迭代序列 $\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 分别强收敛到 u^*,x^*,y^* 和 z^*,其中,(u^*,x^*,y^*,z^*) 是广义非线性隐拟变分包含(1)的解。

证明 由算法(1)有

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant{}&(1-\lambda)\|u_n-u_{n-1}\|+\lambda\|u_n-u_{n-1}-(g(u_n)-g(u_{n-1}))\|+\lambda\|m(u_n)-m(u_{n-1})\|+\\&\lambda\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_n)-m(u_n)-\rho N(p(u_n),x_n,y_n))-J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(g(u_{n-1})-m(u_{n-1})-\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))\|\end{aligned}\qquad(7)$$

由引理 2 和条件(5)得

$$\begin{aligned}&\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_n)-m(u_n)-\rho N(p(u_n),x_n,y_n))-J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(g(u_{n-1})-m(u_{n-1})-\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))\|\leqslant\\&\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_n)-m(u_n)-\rho N(p(u_n),x_n,y_n))-J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_{n-1})-m(u_{n-1})-\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))\|+\\&\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(u_{n-1})-m(u_{n-1})-\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))-J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(g(u_{n-1})-m(u_{n-1})-\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))\|\leqslant\\&\frac{\tau}{\delta}\|g(u_n)-m(u_n)-\rho N(p(u_n),x_n,y_n)-g(u_{n-1})+m(u_{n-1})+\rho N(p(u_{n-1}),x_{n-1},y_{n-1}))\|+\end{aligned}$$

$$\mu\|z_n - z_{n-1}\| \leqslant$$

$$\frac{\tau}{\delta}\|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1}))\| +$$

$$\frac{\tau}{\delta}\|m(u_n) - m(u_{n-1})\| + \mu\|z_n - z_{n-1}\| +$$

$$\frac{\tau}{\delta}\|u_n - u_{n-1} - \rho(N(p(u_n), x_n, y_n) -$$

$$N(p(u_{n-1}), x_n, y_n)\| +$$

$$\frac{\tau}{\delta}\rho\|N(p(u_{n-1}), x_n, y_n) - N(p(u_{n-1}), x_{n-1}, y_n)\| +$$

$$\frac{\tau}{\delta}\rho N(p(u_{n-1}), x_{n-1}, y_n - N(p(u_{n-1}), x_{n-1}, y_{n-1})\|$$

因为 g 是 α − 强单调和 β − Lipschitz 连续，所以有

$$\|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1})\|^2 =$$

$$\|u_n - u_{n-1}\|^2 - 2\langle g(u_n) - g(u_{n-1}), u_n - u_{n-1})\rangle +$$

$$\|g(u_n)g(u_{n-1})\|^2 \leqslant (1 - 2\alpha + \beta^2)\|u_n - u_{n-1}\|^2 \tag{9}$$

进一步，由式(4)和定理 1 的假设得

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant (1 + \frac{1}{1+n})H(Au_n, Au_{n-1}) \leqslant$$

$$a(1 + \frac{1}{1+n})\|u_n - u_{n-1}\| \tag{10}$$

$$\|y_n - y_{n-1}\| \leqslant (1 + \frac{1}{1+n})H(Bu_n, Bu_{n-1}) \leqslant$$

$$b(1 + \frac{1}{1+n})\|u_n - u_{n-1}\| \tag{11}$$

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leqslant (1 + \frac{1}{1+n})H(Cu_n, Cu_{n-1}) \leqslant$$

$$c(1 + \frac{1}{1+n})\|u_n - u_{n-1}\| \tag{12}$$

$$\|u_n - u_{n-1} - \rho(N(p(u_n), x_n, y_n) -$$

$$N(p(u_{n-1}), x_n, y_n))\| =$$

$$\|u_n - u_{n-1}\|^2 - 2\rho\langle N(p(u_n), x_n, y_n) -$$

$$N(p(u_{n-1}), x_n, y_n), u_n - u_{n-1}) +$$

$$\rho^2\|N(p(u_n), x_n, y_n) - N(p(u_{n-1}), x_n, y_n)\|^2 \leqslant$$

$$(1 - 2\rho\gamma + \rho^2\sigma^2\kappa^2)\|u_n - u_{n+1})\|^2 \tag{13}$$

$$\|N(p(u_{n-1}), x_n, y_n) - N(p(u_{n-1}), x_{n-1}, y_n)\| \leqslant$$

$$\xi\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant a\xi(1 + \frac{1}{1+n})\|u_n - u_{n-1}\| \tag{14}$$

$$\|N(p(u_{n-1}), x_{n-1}, y_n) - N(p(u_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1})\| \leqslant$$

$$\nu\|y_n - y_{n-1}\| \leqslant b\nu(1 + \frac{1}{1+n})\|u_n - u_{n-1}\| \tag{15}$$

$$\|m(u_n) - m(u_{n-1})\| \leqslant \zeta\|u_n - u_{n-1}\| \tag{16}$$

由式(7) − (16)得

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant \theta_n\|u_n - u_{n-1}\|$$

其中

$$\theta_n = 1 - \lambda + \lambda h_n$$

$$h_n = (1 + \frac{\tau}{\delta})\sqrt{1 - 2\alpha + \beta^2} + (1 + \frac{\tau}{\delta})\zeta +$$

$$\frac{\tau}{\delta}\sqrt{1 - 2\rho\gamma + \rho^2\sigma^2\kappa^2} + \rho\frac{\tau}{\delta}(a\xi + b\nu)(1 + \frac{1}{1+n}) +$$

$$\mu c(1 + \frac{1}{1+n})$$

易见 $h_n \to h(n \to \infty)$，由式(6)知 $h < 1$，所以当 n 充分在时 $\theta_n < 1$，故 $\{u_n\}$ 是 Cauchy 序列。设 $u_n \to u^*$，由式(10) − (12)和 $\{u_n)$ 是 Cauchy 序列可得 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 也是 Cauchy 序列。设 $x_n \to x^*$，$y_n \to y^*$，$z^n \to z^*(n \to \infty)$，而

$$d(x^*, Au^*) \leqslant \|x^* - x_n\| + d(x_n, Au^*) \leqslant$$

$$\|x^* - x_n\| + H(Au_n, Au^*) \leqslant$$

$$\|x^* - x_n\| + a\|u_n - u^*\| \to 0$$

所以，$x^* \in Au^*$，同理 $y^* \in Bu^*$ 和 $z^* \in Cu^*$，故 (u^*, x^*, y^*, z^*) 是变分包含(1)的解，证毕。

注 2　定理 1 改进和推广了文献[1 − 5]的相应结果。

参考文献

[1] HUANG N J, FANG Y P. A new class of general variational inclusions involving maximal η − monotone mappings [J]. Publ Math Debrecen, 2003, 62: 83 − 98.

[2] DING X P, LUO C L. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasi − variatonal − like inclusions [J]. Comput Appl Math, 2000, 113: 153 − 165.

[3] HUANG N J. A new completely general class of variational inclusions with noncompact valued nappngs [J]. Computers Math Appl, 1998, 35(10): 9 − 14.

[4] LEE C H, ANSARI Q H, YAO J C. A perturbed algorithm or strongly nonlinear variational − likeinclusions [J]. Bull Astral Math Soc, 2000, 62: 417 − 426.

[5] LIU Z Q, KANG S M, UME J S. On general variational inclusions with noncompact valued mappings [J]. Advanced in Nonlinear Variational Inequalities, 2002, (5): 11 − 25.

[6] NADLER S B. Multivalued contraction mappings [J]. Pacific J Math, 1969, 30: 475 − 488.

(下转第 124 页)

Analysis on the Game of Supervision on the Listed Company's Administrator

YANG Bai, PU Yong-jian

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Congqing 400030, China)

Abstract: When studying on the supervision on listed company performance manipulation, the administrator's role has been emphasized increasingly. By setting up a game model, the article analyzes the performance manipulation made by the listed company's administrator. The analysis shows that the optimal performance manipulation strategy taken by the administrator is determined by the profits obtained by China Securities Regulatory Commission (CSRC) and the prior probability of the listed company performance categories made by CSRC, while the optimal supervision strategy taken by CSRC is determined by the final profits of the listed company. Thus, it is obvious that there is a mutual guessing and influencing relationship between the listed company's administrator and CSRC. Finally, the game model constructed is further analyzed by employing it in the real cases.

Key words: performance manipulation; securities supervision; optimal strategy

(编辑 刘道芬)

(上接第 73 页)

New Class of Generalized Nonlinear Variational Inclusions

JIN Mao-ming

(Department of Mathematics, Fuling Theachers College, Fuling, Chongqing 408003, China)

Abstract: The authors introduce and study a new class of generalized nonlinear variational inclusions with maximal η-monotone mappings, in Hilbert spaces. By using the resolvent operator technique for maximal η-monotone mapping, we construct a new algorithm for solving this kind of variational inclusions, and prove vonvergence of iterative sequences generated by the algorithm. Those results improve and extend some known results.

Key words: variational inclusion; maximal η-monotone mapping; resolvent operator; algorithim; convergence.

(编辑 张 苹)