

文章编号:1000-582X(2004)03-0016-06

曲杆有限元与拱的临界载荷算法*

张培源, 盛天文, 张晓敏

(重庆大学资源与环境工程学院, 重庆 400030)

摘要:从初应力位形上附加变形的场论出发, 提出弹性屈曲问题的控制方程和变分原理的普遍形式; 在这个理论框架下, 通过降维处理, 导出平面拱弹性屈曲问题求解临界载荷的变分方程、控制方程以及相应的线性齐次微分方程的特征值问题; 进一步放弃平截面假设, 考虑剪切变形, 给出曲杆截面含6个自由度的一维有限元法算法。推导过程和计算结果表明, 该理论体系导出曲杆有限元方程准确, 易于数值实施, 计算结果更符合实际情况。

关键词:初应力位形; 附加变形场论; 弹性屈曲; 拱; 剪切变形

中图分类号: TB125

文献标识码: A

一般地说, 工程结构或构件的工作状态总可以看作相对含静态初应力的参考位形作附加的变形运动。初应力可能是预应力也可能是恒载产生的应力。附加其上的变形运动, 可以是荷载产生的变形运动。

迭加于初应力位形上的小变形弹性力学, 就一般原理而言, 已经得到确立^[1-2]。

无初应力的变形运动与附加在含初应力位形上的变形运动有不同的支配方程, 因此通过附加变形所表现的力学行为来反求构件或构件参数, 反求结构或构件缺陷时必然应计入初应力的影响。弹性屈曲分析也是附加变形所表现的力学行为, 因此也可以从初应力位形上附加变形的途径讨论弹性屈曲及临界条件。这条研究路线既适用于后屈曲分析, 也适用于临界条件分析, 更多地具有理性化和规范化的优点。

尽管以初应力位形上附加变形来讨论弹性屈曲已经持续了较长的时间, 但是如何利用杆、板和壳之类构件的几何形状, 将初应力位形上附加变形的场论实用化, 建立相应的应用理论^[3-4], 得到工程实用的成果, 还是一项值得研究的工作。

笔者将这方法用于平面圆弧拱的弹性屈曲问题, 导出后屈曲分析和求临界条件的一维形式的变分方程。以此为基础, 取结点的3个线位移和3个角位移为广义位移, 按线性插值, 考虑剪切变形, 建立有限元算法, 编制相应的程序, 并给出算例, 得到圆弧拱临界力的数值解。与建立控制方程的几何分析方法^[5-9]或其它的数值方法相比, 在曲线形构件等几何结构复杂

情况下, 按这条路线导出变分方程或控制方程, 发展有限元算法的路线更具一般性, 且条理清晰, 效率和精度较高。

1 初应力位形上的附加变形的场论

当前的参考位形 V 到即时位形 \bar{V} 的变换表示为

$$\xi_j = \xi_j(x_1, x_2, x_3, t)$$

式中 $j = 1, 2, 3$; x_i 和 ξ_j 分别是当前的物质坐标和空间坐标。它们都在同一直线直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中度量。从位形 V 到位形 \bar{V} 的位移表示为物质描写 u_j , 且有关系:

$$\xi_j = u_j(x_1, x_2, x_3, t) + x_j \quad (1)$$

由 V 到 \bar{V} 的变形梯度、小变形应变张量和 Green 应变张量分别为

$$\xi_{j,i} = \delta_{ji} + u_{j,i} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{j,i} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2 \quad (3)$$

$$E_{ji} = \varepsilon_{j,i} + u_{m,j}u_{m,i}/2 \quad (4)$$

位形 \bar{V} 上的应力用第一类和第二类 Piola - Kirchhoff 应力描写, 分别记为 \bar{T}_{ji} 和 \bar{S}_{ji} , 其关系为

$$\bar{T}_{ji} = \bar{S}_{jp}\xi_{i,p} \quad (5)$$

对于弹性固体, 第二类 P - K 应力可以用 Green 应变确定, 记本构方程为

* 收稿日期: 2003-12-08

作者简介: 张培源(1941-), 男, 重庆市人, 重庆大学教授, 主要从事连续介质力学、弹性及断裂方向研究。

$$\bar{S}_{ji} = S_{ji}^*(E_{kl}) \quad (6)$$

当 $E_{kl} = 0$, 函数 S_{ji}^* 的值便是当前的参考位形上的应力, 即初应力, 记为

$$S_{ji}^0 = S_{ji}^*(E_{kl})_{\varepsilon_{kl}=0} \quad (7)$$

因此, 定义增量第二类 P - K 应力为

$$S_{ji} = \bar{S}_{ji} - S_{ji}^0 = S_{ji}^*(E_{kl}) - S_{ji}^*(0) \quad (8)$$

把第二个等号的右端在 $E_{ji} = 0$ 处作 Taylor 展开, 保留 ε_{kl} 到的线性项, 得到

$$S_{ji} = A_{jik}E_{kl} \quad (9)$$

对于超弹性固体^[10], 类似的推理也可以得到式(9), 只是当前模量张量 A_{jik} 具有 Voigt 对称性:

$$A_{jik} = A_{ijk} = A_{jki} = A_{kji} \quad (10)$$

定义增量第一类 PK 应力为

$$T_{ji} = \bar{T}_{ji} - S_{ji}^0 \quad (11)$$

由式(2)、(5)和(8)可以得到

$$\bar{T}_{kl} = S_{kl}^0 + S_{kp}^0 u_{l,p} + S_{kp}(\delta_{lp} + u_{l,p})$$

考虑到式(4)和(9), 又有

$$\bar{T}_{kp} = S_{kp}^0 + S_{kl}^0 u_{p,l} + \frac{1}{2} D_{klmn}(u_{m,n} + u_{n,m} + u_{i,m} u_{i,n})(\delta_{kl} + u_{p,l})$$

因此

$$\bar{T}_{kp} = S_{kl}^0 u_{p,l} + \frac{1}{2} D_{klmn}(u_{m,n} + u_{n,m} + u_{i,m} u_{i,n})(\delta_{kl} + u_{p,l})$$

保留位移梯度的二次及其以内的项, 即忽略三次项, 得到位移梯度与增量第一类 P - K 应力的二次弹性关系

$$T_{kp} = S_{kl}^0 u_{p,l} + \frac{1}{2} D_{klmn}(u_{m,n} + u_{n,m} + u_{i,m} u_{i,n}) + \frac{1}{2} D_{klmn}(u_{m,n} + u_{n,m}) u_{p,l} \quad (12)$$

第一类 PK 应力满足动量方程

$$\bar{T}_{ji,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (13)$$

式中 \bar{f}_i 和 ρ 分别为即时位形上的体力 and 当前参考位形上的密度, 记号 \ddot{u}_i 表示对时间变量的二阶偏导数。初应力总满足平衡方程

$$S_{ji,j}^0 + f_i^0 = 0 \quad (14)$$

式中 f_i^0 为参考位形上的体力。因此, 增量第一类 PK 应力满足如下动量方程

$$T_{ji,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (15)$$

式中引入了增量体力 f_i ,

$$f_i = \bar{f}_i - f_i^0 \quad (16)$$

方程(12)和(15)组成初应力位形上的附加变形的场论的控制方程。

容易证明, 如下虚功方程^[5]

$$\int_V T_{ji} \delta u_{i,j} dv = \int_V (f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dv + \int_{\partial V} T_i^{(n)} \delta u_i da \quad (17)$$

与方程(15)和边界条件

$$\partial V: T_{ji} n_j = T_i^{(n)} \quad (18)$$

等价。这里 n_j 和 $T_i^{(n)}$ 分别表示边界外法线单位向量和相应的外加面力。下面给出 $T_i^{(n)}$ 的含义。

参考位形 V 和即时位形 \bar{V} 上有应力边界条件

$$n_k S_{kl}^0 = p_l^0 \quad (19)$$

$$n_k \bar{T}_{kl} da = \bar{P}_l d\bar{a} \quad (20)$$

式中 da 、 n_k 和 p_l^0 分别是位形 V 的面元、外法线单位矢和外加面力; $d\bar{a}$ 、 \bar{n}_k 和 \bar{P}_l 分别是位形 \bar{V} 的面元、外法线单位矢和外加面力。由式(11), 导出边界条件(18)中 $T_i^{(n)}$ 的表达式

$$T_i^{(n)} = \bar{P}_l \frac{d\bar{a}}{da} \quad (21)$$

如果表面受压力 P , 且在位形 V 和位形 \bar{V} 上保持相同的数值。那末

$$P_l^0 = -n_l P, \quad \bar{P}_l = -\bar{n}_l P \quad (22)$$

由 Nanson 公式, 保留到位移梯度的一般阶量, 得到

$$\bar{n}_l = n_l(1 + \varepsilon_{jk} n_j n_k) - u_{k,l} n_k \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{da} &= j(x_{k,p} x_{l,p} n_k n_l)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{pp} n_p n_p \end{aligned} \quad (24)$$

因此得到

$$T_i^{(n)} = p n_k u_{k,i} - p \varepsilon_{kk} n_i \quad (25)$$

此外, 如果外表面的位移为已知, 则边界条件可表示为

$$u_i = \bar{u}_i \quad (26)$$

2 弹性屈曲问题和临界条件及曲线坐标描写

弹性屈曲问题可以叙述为: 在方程(15)中不计惯性力, 且外加增量体力为零, 在(18)和(26)中, 给定增量面力和给定增量边界位移满足与增量位移的线性齐次关系, 对给定的静态初应力场, 求增量应力和增量位移的分布。

相应的边值问题是:

本构方程(12)

平衡方程:

$$T_{ji,j} = 0 \quad (27)$$

应力边界条件:

$$n_k T_{kl} = T_i^{(n)} \quad (28)$$

或位移边界条件:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (29)$$

容易看到, 这套边值问题是齐次的, 总存在零解, 未必一定存在非零解。

如果存在非零解, 将仅仅存在零解与同时存在零解和非零解的“分枝点”称为临界点。求临界点条件只

需用线性理论,即将方程(12)线性化处理,得到

$$T_{kp} = S_{kl}^0 u_{p,l} + D_{klmn} \varepsilon_{mn} \quad (30)$$

对于临界条件,存在相应的变分方程。引入位移梯度的如下函

$$V(H_{pq}) = \frac{1}{2} (A_{ijkl} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{kl} + S_{mn}^0 u_{j,m} u_{j,n}) \quad (31)$$

它相当于应变能密度,有如下关系

$$T_{ji} = \frac{\partial V}{\partial H_{ji}} \quad (32)$$

这里

$$H_{ji} = u_{j,i} \quad (33)$$

于是,临界条件的变分方程为

$$\delta \int_V v dv - \int_{\partial V} T_j^{(n)} \delta u_j da = 0 \quad (34)$$

设曲杆的轴线是平面曲线 C ,用 s 表示轴线弧长坐标。动点 s 处位矢 $r(s)$,切线、法线、次法线单位矢量和曲率分别记作 $r'(s)$ 、 e_s 、 e_n 、 e_b 和 k 。一般而言,它们都是弧长坐标 s 的函数。任意点 M 的位矢记作 r_M

$$r_M = r(s) + ye_n + ze_b$$

变量 s, y, z 组成一套正交曲线坐标系,简称自然坐标系。坐标 s, y, z 用角标量简记为 y_α ($\alpha = 1, 2, 3$)。以此为当前物质坐标,采用当前物质描写,即当前 Lagrange 描写。分别记增量第一类 P-K 应力,增量第二类 P-K 应力、初应力、应变和位移的物理分量为:

$$T_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{\alpha\beta}, u_\alpha$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

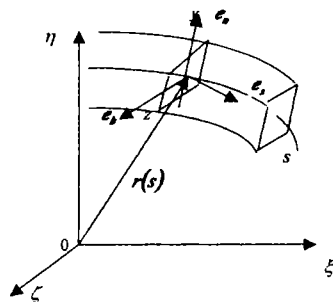


图1 自然坐标系

将前节所述初应力位形上小变形场论变分方程用自然坐标系描写,方程(34)成为

$$\int_0^l ds \iint [T_{11} \xi \delta(u_{1,1} + ku_2) + T_{21} \delta u_{1,2} + T_{31} \delta u_{1,3} + T_{12} \xi \delta(u_{2,1} + ku_1) + T_{22} \delta u_{2,2} + T_{32} \delta u_{2,3} + T_{13} \xi \delta u_{3,1} + T_{23} \delta u_{3,2} + T_{33} \delta u_{3,3} (1 + ky)] dy dz - \int_{\partial V} T_j^{(n)} \delta u_j da = 0 \quad (35)$$

与方程(30)相应,式(35)中

$$T_{11} = S_{11} + S_{11}^0 \xi (u_{1,1} + ku_2) + S_{12}^0 u_{1,2} + S_{13}^0 u_{1,3}$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= S_{12} + S_{11}^0 \xi (u_{2,1} + ku_1) + S_{12}^0 u_{2,2} + S_{13}^0 u_{2,3} \\ T_{13} &= S_{13} - S_{11}^0 \xi u_{3,1} + S_{12}^0 u_{3,2} + S_{13}^0 u_{3,3} \\ T_{21} &= S_{21} + S_{21}^0 \xi (u_{1,1} + ku_2) + S_{22}^0 u_{1,2} + S_{23}^0 u_{1,3} \\ T_{22} &= S_{22} + S_{21}^0 \xi (u_{2,1} - ku_1) + S_{22}^0 u_{2,2} + S_{23}^0 u_{2,3} \\ T_{23} &= S_{23} - S_{21}^0 \xi u_{3,1} + S_{22}^0 u_{3,2} + S_{23}^0 u_{3,3} \\ T_{31} &= S_{31} + S_{31}^0 \xi (u_{1,1} + ku_2) + S_{32}^0 u_{1,2} + S_{33}^0 u_{1,3} \\ T_{32} &= S_{32} + S_{31}^0 \xi (u_{2,1} - ku_1) + S_{32}^0 u_{2,2} + S_{33}^0 u_{2,3} \\ T_{33} &= S_{33} - S_{31}^0 \xi u_{3,1} + S_{32}^0 u_{3,2} + S_{33}^0 u_{3,3}, \end{aligned} \quad (36)$$

这里

$$S_{kp} = A_{klmn} \varepsilon_{mn} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \xi (u_{1,1} + ku_2), \varepsilon_{22} = u_{2,2} \\ \varepsilon_{33} &= u_{3,3}, \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma_{2,3} + u_{3,2} \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = u_{1,2} + \xi (u_{2,1} - ku_1), \\ \gamma_{31} &= \gamma_{13} = u_{1,3} + \xi u_{3,1} \end{aligned} \quad (38)$$

这里 $\xi = 1/(1 + ky)$ 。

方程(35 ~ 38)很难在文献中找到。这里所列均由作者独立导出,导出方法之一是曲线坐标的张量分析^[11];方法之二为坐标变换式。这里不列出推演过程。

3 平面拱的稳定问题

如果 u, v, w 分别为平面曲杆轴线的轴向、 y 向和 z 向位移(挠度), φ 和 ψ 分别为截面的转角,即分别绕过截面参考点 M 的 z 平行轴和 y 平行轴的转角, θ 为扭转角,它们都是轴线弧长坐标和时间变量的函数。设为 $\omega(y, z)$ Saint Venant 扭转函数^[2,3,5],即扭转翘曲函数,用以描述约束扭转。那末失稳模式的一般形式为:

$$\begin{cases} u_1(s, y, z) = u(s) - y\varphi(s) + z\psi(s) + \theta(s)\omega(y, z) \\ u_2(s, y, z) = v(s) - \theta(s)z \\ u_3(s, y, z) = w(s) + \theta(s)y \end{cases} \quad (39)$$

利用式(35),变分式(34)成为

$$\int_0^l [T_s \delta(u + kv) + Q_s \delta(v' - ku) + Q_z \delta w' + M_z \delta \varphi' + M_y \delta(\psi' - k\theta) - N_s \delta \psi + H \delta \theta' + M_s \delta(\theta' + k\psi) + M_\omega \delta \theta' + Q_{yz} \delta \theta] ds = \int_0^l [q_s \delta u + q_y \delta \theta' + q_z \delta w + m_s \delta \varphi + m_y \delta \psi + m_z \delta \theta + h \delta \theta + h \delta \theta'] ds \quad (40)$$

对于矩形截面曲梁,如果曲梁的外侧面在屈曲过程中所受均布压力数值不变,利用式(25)的自然标架形式,可以得到式(35)中

$$- \int_{\partial V} T_j^{(n)} \delta u_j da = \int_0^l (-p\varphi \delta w) ds \quad (41)$$

即式(40)中 $q_s = p\varphi, q_z = -p\theta, q_y, m_z, m_y$ 和 m_s 为零,它们正是由增量变形引起的广义附加荷载。广义应力

有：

$$\begin{aligned}
 T_x &= T^{(z)} + T^0(u' + kv) + M_x^0\varphi' - Q_y^0 \\
 M_x &= M_x^{(z)} - M_x^0(u' + kv) \\
 M_y &= M_y^{(z)} \\
 Q_y &= Q_y^{(z)} + T^0(v' - ku) - kM_x^0\varphi \\
 N_y &= N_y^{(z)} + Q_y^0(u' + kv) \\
 N_z &= N_z^{(z)} + M_x^0\theta' \\
 H &= H^{(z)} \\
 M_s &= M_s^{(z)} - M_z^0w' \\
 Q_{yz} &= Q_y^0w' \quad (42)
 \end{aligned}$$

对于初应力,仅讨论其 3 个特征量,分别为轴力,面内弯矩与剪力:

$$T^0 = \iint s_{11}^0 dydz, M_x^0 = - \iint s_{11}^0 y dydz, Q_y^0 = \iint s_{12}^0 dydz, \quad (43)$$

可以证明它们满足平衡方程

$$\begin{aligned}
 T^0 + kQ_y^0 + q_x^0 &= 0, Q_y^0 - kT^0 + q_y^0 = 0, \\
 M_x^0 + Q_y^0 + m_x^0 &= 0 \quad (44)
 \end{aligned}$$

式 q_x^0, q_y^0, m_x^0 中是杆的等效初始载荷。式(42)中右上角标表示与初应力无关、只与增量变形相关的广义内力部分,在一般情况下,根据式(9),总可以表为线性关系:

$$\begin{aligned}
 T^{(z)} &= D_{11}(u' + kv), M_x^{(z)} = D_{22}\varphi' \\
 Q_y^{(z)} &= N_y^{(z)} = D_{44}(v' - ku - \varphi), \\
 M_y^{(z)} &= D_{33}\psi', H^{(z)} = D_{88}\theta'
 \end{aligned}$$

$$Q_z^{(z)} = N_z^{(z)} = D_{55}(w' + \psi), H^{(z)} = D_{88}\theta' \quad (45)$$

右上角标“0”表初应力部分,这里忽略初应力分量在面内的高阶矩,以及约束扭转效应,将式(42)和(41)代入(40),得到如下 6 个方程,即变分问题的欧拉方程:

$$\begin{aligned}
 &[(D_{11} + T^0)u'' + T^0u' - k^2(D_{44} + T^0)u + [k(D_{11} + T^0 + D_{44} + T^0)v' + kT^0] + [M_x^0\varphi'' + (M_x^0 - Q_y^0)\varphi' - (Q_y^0 + kD_{44} + K^2M_z^0 - P)\varphi] = 0 \\
 &[-K(D_{44} + D_{11} + 2T^0)u' - kT^0u] + [(D_{44} + T^0)v'' + T^0v' - k^2(D_{11} + T^0)v] + [- (D_{44} + 2kM_x^0)\varphi'' + k(Q_y^0 - M_x^0)\varphi'] = 0 \\
 &[(D_{55} + T^0)w'' + T^0w'] + [-M_x^0\theta'' + (Q_y^0 - M_x^0)\theta' + (Q_y^0 - p)\theta] + D_{55}\psi'' = 0 \\
 &[-M_x^0u'' + (Q_y^0 - M_x^0)u' - kD_{11}u] + [(-kM_x^0 + D_{44})v'' + k(Q_y^0 - M_x^0)v] + [D_{22}\varphi'' - D_{44}\varphi] = 0 \\
 &[(D_{55} - kM_x^0)w'' + [kD_{99}\theta''] + [D_{33}\psi'' + D_{55}\psi] = 0 \\
 &[M_x^0w'' + (Q_y^0 + M_x^0)w'] + [D_{88}\theta^{(4)} - D_{99}\theta''] + [-kD_{33}\psi] = 0 \quad (46)
 \end{aligned}$$

相应的边界条件:

$$\begin{aligned}
 u = 0, v = 0, v' = 0, w = 0, w' = 0 \\
 \theta = 0, \theta' = 0, \varphi = 0, \psi = 0 \quad (47)
 \end{aligned}$$

由方程(46)可见,面内失稳(u, v, φ)和面外失稳(w, ψ)不偶合,它们各有自己的控制方程。根据位移边界条件方程(47)用 Ritz 法中求近似解法可得到曲梁面内变形失稳临界载荷,和曲梁面外变形失稳临界载荷。式(45)中 $D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}, D_{88}$ 和 D_{99} 是与当前应力状态有关的等效弹性常数。通常情况下,认定其为确定的材料参数。

4 临界载荷的有限元法算法

下面讨论基于变分方程(40)的有限元算法。

变分方程(40)含 6 个位移变分,由(46)之结论,结合(47),可将(40)式分解成两组独立的变分方程,分别为面内失稳和面外失稳模式,其式如下:

$$\int_0^l [(T_s\delta u' - kQ_s\delta u) + (kT_s\delta v + Q_s\delta v) + (M_s'\delta\varphi' - N_s\delta\varphi)] ds = 0 \int_0^l [(T_s\delta w' + ((Q_{zs} - kM_s)\delta\theta + (M_{zs} + M_w)\delta\theta + H\delta\theta) + ((N_z + kM_s)\delta\theta + (M_z)\delta\psi + M_s\delta\psi)] ds = 0 \quad (48)$$

其中各广义应力如(42)。

将曲梁离散为等分,对每一个曲杆单元,引用

$$\begin{aligned}
 \text{Lagrange 线性插值,插值函数为 } N_i &= \frac{s_j - s}{s_j - s_i} = \frac{a_j - a}{a_j - a_i}, \\
 N_j &= N_{i+1} = \frac{s_j - s}{s_j - s_i} = \frac{a_j - a}{a_j - a_i} \quad (49)
 \end{aligned}$$

将曲梁 6 个广义位移的分布用每结点的 6 个广义位移描写,得到 2 个 $n + 1$ 个结点 $3(n + 1)$ 个广义位移的线性齐次代数方程(这里为曲梁上点的轴坐标, s_i, s_j 为 i, j 结点的轴坐标; α 为点对应的角坐标)。则单元位移模式:

$$\tilde{\phi} = [\tilde{N}_i^T \tilde{N}_j^T] \quad (50)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_i &= [N_i, N_i, N_i]^T \\
 \tilde{N}_j &= [N_j, N_j, N_j]^T
 \end{aligned}$$

对面内变形: $\tilde{\phi} = [u \ v \ \varphi]$

对面外变形: $\tilde{\phi} = [w \ \theta \ \psi]$ 式(49)和(50)代入式(47)得到拱结点位移表示的变分方程,系数矩阵行列式为零时,导出构件的临界载荷。

5 算例分析

对受径向均布载荷 p 作用的两端嵌固约束的圆弧拱如图 2:

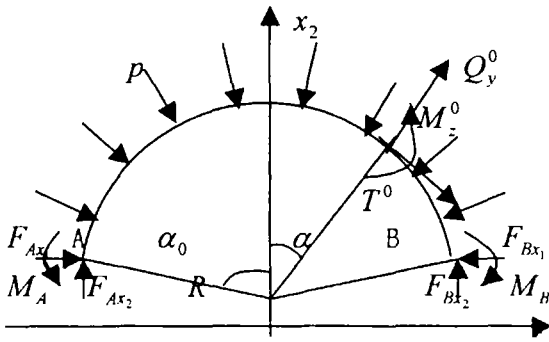


图2 两端嵌固定约束的圆弧拱

与已有文献^[6]比较,发现其值均减小。将文献中稳定系数分别记为 K_1' 和 K_2' , 则若将所得稳定系数写成

$$K_1 = \frac{1}{1 + f_1(a, x_1)} K_1'$$

$$K_2 = \frac{1}{1 + f_2(a, x_2)} K_2'$$
(51)

由上数据,得 $f_1(a, x_1)$ 和 $f_2(a, x_2)$ 如下:
由上表大部分数据可近似得到

$$f_1(a, x_1) = 9.2x_1/a^2$$

$$f_2(a, x_2) = 7.14x_2/a^2$$
(53)

6 结束语

在已有文献的基础上,引入剪切变形对拱稳定的影响,不难分析知道剪切变形将降低拱的面内和面外稳定系数。由上表算得结果,与已有文献结果对照,符合与上述结论,并且对粗短拱,拱稳定系数受剪切变形影响大,比未考虑剪切变形所得稳定系数下降多。反映了圆弧拱在均布作用压力下,当拱跨度较小时,剪切变形对拱稳定的影响不能忽略。最后给出剪切变形对稳定系数影响的近似表述,对圆弧形拱构件设计有一定的参考意义。

参考文献

- [1] TOUPIN R A, BERNSTEIN B. Sound waves in deformed perfectly elastic material, Acoustoelastic effect [J]. J Acoust. Sos Amer., 1961, 33: 216 - 225.
- [2] ERINGEN A C, SUHUB E S. Elast odynamics [M]. New York and London: Academic Press, 1974.
- [3] 张晓敏, 张培源, 彭向和. 初应力位形上小的变形问题 [J]. 工程力学, 2002, 24, (3): 345 - 147.
- [4] 任云霞, 张培源. 初应力位形上薄板小变形问题的变分方法 [J]. 固体力学学报, 2001, 22 专辑: 309 - 313.
- [5] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. New York: McGraw - Hill Company, 1961.
- [6] 向海帆, 刘光栋. 拱结构的稳定和振动 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1991.
- [7] 张智舟. 对称变曲率拱在均匀径压作用下的非线性稳定性 [J]. 航空学报, 1994, 15(8): 980 - 984.
- [8] 戴仁杰. 板拱桥的受力分析 [J]. 结构工程师, 1997, (1): 2 - 10.
- [9] 王小岗, 凌道盛, 徐兴. 拱屈曲载荷分析的三维退化曲梁单元有限元法 [J]. 力学与实践, 2000, 22(2): 19 - 22.
- [10] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.
- [11] 翁志远. 结构振动理论 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1998.
- [12] 苏训道. 各向异性材料力学 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.

(下转第 27 页)

其初应力 3 个特征量有

$$T^0 = -F_{Ax} \cos \alpha - Rp(1 - \cos \alpha_0 \cos \alpha)$$

$$Q_y^0 = -F_{Ax} \sin \alpha + R p \cos \alpha_0 \sin \alpha$$

$$M_z^0 = -M_A - F_{Ax} R (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

$$+ R^2 p \cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 \cos \alpha - \cos^2 \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 \sin \alpha) \quad (51)$$

其中 R 为拱半径, F_{Ax} , M_A 为拱端点 A 的支反力和力矩, 可由卡氏定理求得, 它们是半拱圆心角 α_0 和均匀线载荷 P 的函数, 其形式复杂, 这里未给出。拱变形变分方程为式 (48), 当构件未处于稳定平衡时, 拱相对参考位形没有附加位移, 此时构件所受载荷小于其临界载荷, 线性齐次代数方程只有零解, 其系数矩阵行列式不为零。当初始载荷等于临界载荷, 线性齐次代数方程有非零解, 拱处于临界状态, 其系数矩阵行列式为零, 满足此条件的初始载荷为临界载荷。

对两端嵌固弧形拱, 拱圆心角为 $\alpha(2\alpha_0)$ (2), 拱半径为 R 。由上几何尺寸则材料参数 $D_{11} = EA, D_{22} = EI_z, D_{33} = EI_y, D_{44} = \eta GA, D_{55} = \eta GA, D_{99} = GJ_d$ 可知^[11-12], 其物理意义分别为轴向拉压刚度、面内弯曲刚度、侧向弯曲刚度、面内剪切刚度、面外剪切刚度和扭转刚度。

通常可将拱的临界载荷表示 $P_{cr} = K \frac{D}{R^3}$ 为形式, D

为弯曲刚度, 面内失稳时为面内弯曲刚度 D_{22} , 面外失稳为面外弯曲刚度 D_{33} ; K 为拱稳定系数。

计算结果与比较分析:

当 D_{22} 和 D_{33} 为任意给定值, 对不同的拱心角 (对应不同的拱跨), 考虑剪切变形对拱稳定的影响。对面内失稳, 令 $x_1 = D_{22}/(D_{44}R^2)$; 对面外失稳, 令 $x_2 = D_{33}/(D_{55}R^2)$ 。取不同的 D_{44} 和 D_{55} (不同的 x_1 和 x_2), 对应算得的圆弧拱的面内面外稳定系数分别如下:

表 1 面内失稳稳定系数 K_1

α	30°	90°	150°
0.1	16.82	5.83	2.86
0.01	54.58	7.78	3.22

表 2 面外失稳稳定系数 K_2

α	30°	90°	150°
0.1	38.7	10.57	3.719
0.01	111.2	12.72	4.056

Development in Modern Data-Mining Techniques

LIANG Xie-xiong, LEI Ru-huan, CAO Chang-xiu

(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030, china)

Abstract: Data-mining is a composite and multi – disciplinary technology newly developed. This paper will start by describing the fundamentals and basic methods of the technology followed by an overview of the latest development of its applications, problems and hurdles currently facing and the way forward and future work.

Key Words: knowledge discovery in database, data-mining, data-warehouse, decision support

(编辑 吕赛英)

~~~~~  
(上接第 20 页)

## Elastic Buckling and Critical Load of an Pre – stressing Arch

*ZHANG Pei-yuan, SHENG Tian-wen, ZHANG Xiao-min*

(College of Resources and Environmental Science, Chongqing University, Chongqing 400030, china)

**Abstract :** According to the field theory of additional deformation on pre – stressed configuration , in the paper , the ordinary expression of the governing equation and variational equation of elastic buckling are brought forward。 Under the theory system, through lowering dimensions, the governing equation and variational equation for the critical condition solution of elastic buckling of a plane arch are deduced, and the eigenvalues problem of the linear homogeneous differential equations corresponding to the equations are concluded While Abandoning the plane assumption and considering shearing deformation, the linear finite element method arithmetic of bending bars cross section containing six degree of freedom is given. The process of derivation and calculational results show that, under this system info, the finite element equations of bending bar deduced are accurate and easy to be used to numeric calculations, and the conclusion achieved is more practical.

**Key words:** pre-stressed configuration; field theory of additional deformation; elastic buckling; arch; shearing deformation

(编辑 成孝义)