文章编号:1000 - 582X(2004)06 - 0096 - 03

群组决策可接受性理论*

董玉成,陈义华
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘　要:一个群组决策中,采用算术(几何)加权平均方法得到的综合排序向量是否合理和可以接受是一个很重要的问题。把一组决策抽象为 R^n 空间中平面区域上的点集,通过对其分布的讨论,构造了一个变量来近似衡量一个群组决策中和综合排序向量有明显意见分歧的专家比例,从理论上探讨了群组决策可接受性问题,然后设计了一个算法把一个高维的排序向量进行降维处理,以方便在实际中运用,起到了较好的效果。

关键词: AHP 群组决策;综合排序向量;可接受度;降维
中图分类号:O223　　　　**文献标识码**:A

一个复杂系统通常总是有多个决策者(即专家)或决策部门参与决策。这样在用 AHP 模型进行专家咨询时,对同一个准则,将获得多个判断矩阵,即群组决策。关于群组决策 AHP 问题,萨迪、奈维斯(Neves. J)等都作了研究,方法主要采用特征根法。王汝华用计算机仿真方法研究表明加权算术(几何)平均综合向量的方法相对更适宜。

但是,由于决策者对一个问题的看法存在差异,如何定量评价各决策者对某一问题看法的差异,如何衡量群组决策的可接受程度,是加权算术(几何)平均综合向量的前提。

近年研究较多的是判断矩阵一致性问题[1-2],文献[3-6]虽然讨论了群组决策可接受性问题,但是都缺乏确定阈值的合理方法。笔者设计了一个变量统计群组决策中和综合排序向量有明显意见分歧的专家比例,用它来衡量综合排序向量的可接受程度,取得了较好的效果。

1　群组决策空间建模

由于专家权重不同可以转化为专家人数的不同,因而本文假设各专家权重相等。

定义 1　设 AHP 中有一决策准则 I,支配有 $n \geq 2$ 个子准则,现有 $m \geq 2$ 个专家进行评判,则记为一个群组决策。

定义 2　设有一群组决策 $I(n,m)$,称 R^n 上平面区域 $R(I,n) = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1(x_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m\}$ 为 $I(n,m)$ 的决策空间,称 $R(I,n)$ 的区域面积为 $I(n,m)$ 的决策总量,记为 $S(I,n)$。

在群组决策 $I(n,m)$ 中,$R(i,n)$ 为决策空间,$w_i = (w_{i1},w_{i2},\cdots,w_{in})$ 为专家 i 的标准化排序向量,由于 $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1,(w_{ij} \geq = 1,2,\cdots,m)$,所以 $w_i \in R(I,n)$。

因而在群组决策 $I(n,m)$ 中,讨论各决策者对某一问题看法的差异和群组决策的可接受程度,就是讨论各专家的标准化排序向量在决策空间 $R(I,n)$ 上的分布情况。

定义 3　设有一群组决策 $I(n,m)$,$R(I,n)$ 为其决策空间,那么在 $R(I,n)$ 上能覆盖 $p(1 \leq p \leq m)$ 个专家的最小覆盖区域称为 p 决策空间,记为 $R_p(n,m)$,它的区域面积称为 p 决策量,记为 $S_p(I,n,m)$。称 $\rho_p(I,n,m) = S_p(I,n,m)/p$ 为 p 决策量密度。

按照上述定义,各变量的实际意义如下。

$R_p(n,m)$:刻划一个群组决策 $I(n,m)$ 中,意见最一致的 p 个专家的所属空间,若 $w_i \in R_p(n,m)$,则专家

* 收稿日期:2004 - 02 - 19
基金项目:2002 年重庆市科技计划资助项目(6719)
作者简介:董玉成(1979 -),男,湖北枝江人,重庆大学硕士研究生,研究方向:评价理论、智能计算。

i 是 p 个意见最一致专家中的一个成员；

$S_p(I,n,m)$：衡量意见最一致的 p 个专家的意见分歧总量，$S_p(I,n,m)$ 越小，则这 p 个专家的意见分歧越小；

$\rho_p(I,n,m)$：衡量意见最一致的 p 个专家的平均意见分歧量。

在一个群组决策中 $I(n,m)$，采用加权算术（几何）排序得到综合向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，若 $w\notin R_p(n,m)$，则可以认为综合排序向量 w 和 $R_p(n,m)$ 中的专家意见存在较大分歧。

定理　设有一群组决策 $I(n,m)$，$R_p(n,m)$ 为其 p 决策空间，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 为加权算术（几何）排序得到综合向量，则 $\exists_p$ 使 $w\in R_{p+1}(I,n)$，但 $w\notin R_p(I,n)$ 或者对 $\forall p$ 都有 $S_p(I,n,m)=0$。

证明　反设 $\forall p$，若 $w\in R_{p+1}(I,n)$，则 $w\in R_p(I,n)$。取 $p=m-1$，因为 $w\in R_{(m-1)+1}(I,n)$，故 $w\in R_{m-1}(I,n)$。

依次类推有：$w\in R_1(I,n)$，因为 $\{w_i\}=R_1(I,n)(j=1,2,\cdots,m)$，所以 $w\in\{w_i\}(i=1,2,\cdots,m)$，故 $w=w_1=w_2=\cdots=w_m$。

所以 $R_p(I,n)=\{w_1\}\{p=1,2,\cdots,m\}$，故 $S_p(I,n,m)=C$。

在群组决策 $I(n,m)$ 中，由上述定理知：

1）当 $\exists p$，使 $w\in R_{p+1}(I,n)$，但 $w\notin R_p(I,n)$ 时，取最大的 p，记为 $p_{\max}$（注意当存在多个最大的 $R_{p_{\max}}(I,n)$ 时，可求其并集包含的专家数记为 $p_{\max}$），由于 $w\notin R_{p_{\max}}(I,n)$，可以认为综合排序向量与 $p_{\max}$ 个专家的意见矛盾，即近似认为综合排序向量只考虑了 $m-p_{\max}$ 个专家的意见，因而定义采用综合排序向量的可接受度为 $\frac{m-p_{\max}}{m}$，记为 $A(I)=\frac{m-p_{\max}}{m}$。

2）当 $\forall p$，都有 $S_p(I,n,m)=0$ 时，所有专家的意见完全一样，因而采用综合排序向量的可接受程度 $A(I)=1$。

这样就得到了一个群组决策 $I(n,m)$ 的可接受程度 $A(I)$，显然 $0\leqslant A(I)\leqslant 1$，其实际意义近似为被综合排序向量考虑了的专家意见占总专家人数的比例。

2　群组决策 R^n 空间降维方法

如上所述，完成了群组决策 $I(n,m)$ 在 R^n 空间平面区域上的建模，但是求解多维空间中的 $R_p(I,n)$ 很困难，求解 $S_p(I,n,m)$ 涉及到多重积分，计算量较大。

当 $n=2$，决策空间为 $x_1+x_2=1(x_1,x_2\geqslant 0)$ 是二维平面上的一条直线段，在其上讨论专家的标准化排序向量的分布是很容易的，因而把一个专家的 $n>2$ 维的标准化排序向量转化为 $n\leqslant 2$ 维，从而把 $n>2$ 单位平面转化成二维平面上的一条直线段，是很有意义的。

算法

1）置 $i=1,k=1,w_i$ 为第个专家的排序向量，令常数 $N=w_i$ 的维数，令 $w=w_i$；

2）降维：对 w_i 进行标准化，并求 w_i 出的维数记为 n，若 $n>2$，转到 3）；

3）取 $j=\left[\frac{n}{2}\right]$，把 w_i 分为两个分量 $w'_i=\{w_{i1},w_{i2},\cdots,w_{ij}\}$ 和 $w''_i=\{w_{i,j+1},w_{i,j+2},\cdots,w_{in}\}$，记录 $w_i^k=\{\sum_{i=1}^{j}w_i,\sum_{i=j+1}^{n}w_i\}$ 是 w_i 的一个降维子式，$k=k+1$，若 $j\leqslant 2$，则记录 $w_i^k=w'_i$ 就是 w_i 一个降维子式，$k=k+1$，否则令 $w=w'_i$ 转到 2）；若 $n-j\leqslant 2$，则记录 $w_i^k=w'_i$ 就是 w_i 一个降维子式，$k=k+1$，否则令 $w=w''_i$ 转到 2）；

4）置 $i=i+1$，若 $i\leqslant N$，令 $k=1,w=w_i$，转到 2），否则降维结束。

在实际群组决策 $I(n,m)$ 中，如果 $n>2$，可以按上述算法把 $w_i(i=1,2,\cdots,m)$ 分解成多个 $n\leqslant 2$ 维的降维子式 $w_i^1,w_i^2,\cdots,w_i^j,\cdots,w_i^c$，对每个降维子式都可以在二维平面上的一条直线段上（若子式 w_i^j 的维数为 1 则不必讨论）讨论 $w_i^j(i=1,2,\cdots,m)$ 的分布情况，计算可接受度 $A^j(I)$，若每个 $A^j(I)$ 都达到了预定要求，则认为 $A(I)$ 是可接受的。

3　算　例

设一群组决策 $I(4,8)$，即一个四子准则，8 个专家的群组决策。专家 i 的标准化排序向量记为 $w_i(w_1,w_2,w_3,w_4)$，具体如下：

$w_1=\{0.1,0.1,0.3,0.5\}$　$w_2=\{0.4,0.4,0.1,0.1\}$

$w_3=\{0.5,0.3,0.1,10.1\}$　$w_4=\{0.1,0.1,0.4,0.4\}$

$w_5=\{0.1,0.7,0.1,0.1\}$　$w_6=\{0.2,0.3,0.3,0.3\}$

$w_7=\{0.1,0.4,0.4,0.1\}$　$w_8=\{0.1,0.1,0.5,0.3\}$

由降维算法可把 w_i 分解成 w_i^1,w_i^2,w_i^3 3 个降维子式，具体如下：

$$w_i^1=\{w_{i1}+w_{i2}+w_{i3}+w_{i4}\},$$
$$w_i^2=\{w_{i1},w_{i2}\},w_i^3=\{w_{i3},w_{i4}\}$$

下面以 w_i^1 为例介绍具体求解过程。

$w_i^1(=1,2,\cdots,m)$ 的具体数据如下：

$w_1^1=\{0.2,0.8\}$，$w_2^1=\{0.8,0.2)$，$w_3^1=\{0.8,0.2\}$

$w_4^1=\{0.2,0.8\}$，$w_5^1=\{0.8,0.2\}$，$w_6^1=\{0.5,0.5\}$，

$w_7^1=\{0.5,0.5\}$，$w_8^1=\{0.2,0.5\}$

考虑权重相同,那么综合排序向量 $w^1=\{0.5, 0.5\}$,其决策子空间记为 $R_p^1(I,2)=\{(x,y)\mid x+y=1, x\geq 0, y\geq 0)\}$,是平面上的一条直线段,故 $R_p^1(I,n)$ 可以由其横坐标值的范围唯一确定,因而得到表 1。

表 1 决策子空间横坐标值

p	q
1	0.5 或 0.2 或 0.8
2	0.5 或 0.2 或 0.8
3	0.2 或 0.8
4	[0.2 0.5]或[0.5,0.8]
5	[0.2 0.5]或[0.5,0.8]
6	[0.2 0.5]或[0.5,0.8]
7	[0.2 0.5]或[0.5,0.8]
8	[0.2 0.8]

说明:q 为 $R_p^1(I,n)$ 中元素的横坐标值

由表 1 可以看到:$\exists p_m=3$,使 $w=\{0.5,0.5\}\in R_4^1(I,n)$,但 $w\notin R_3^1(I,n)$。由于存在两个不相交的 $R_3^1(I,n)$,即$\{(0.2,0.8)\}$和$\{(0.8,0.2)\}$。其并集包含的专家数记为 $p_m=6$,故:$A^1(I)=\dfrac{m-p_m}{m}=\dfrac{1}{4}$

可以看出 w_i^1 的可接受度较低。用类似的方法求得 $A^2(I)$,$A^3(I)$。若 $A^j(I)$ 都达到了既定的可接受程度,则认为加权算术(几何)平均的方法是可行的。

4 结 论

通过群组决策空间建模,构造了一个变量来近似衡量一个群组决策中和综合排序向量有明显意见分歧的专家比例,从理论上探讨了群组决策可接受性问题,设计了一个算法把一个高维的排序向量进行降维处理,以方便在实际中运用,起到了较好的效果。群组决策空间建模可以很容易地推广到其它评价方法。但这只是群组决策可接受问题的一个尝试,更多的工作有待展开。

参考文献:

[1] MA W Y. A practical approach to modifying pair wise comparison matrices and two criteria of modificatory effectiveness[J]. System Science & Systems Engineering, 1994, 3(4): 334-338.

[2] XU Z S, WEI C P. A consistency improving method in analytic Hierarchy process [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 116(2):443-449.

[3] 王莲芬,许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京:中国人民大学出版社,1989. 245-248.

[4] 徐泽水,达庆利. 衡量判断矩阵相容性的一个通用指标[J]. 东南大学学报(自然科学版),2001,31(6):94-97.

[5] 李元左. 广义判断下的群组决策方法[J]. 系统工程,2000,18(2):76-80.

[6] 王莲芬. 相容性与群组决策[J]. 系统工程理论与实践,2000,20(2):92-96.

Acceptance Theory in Group Decision of AHP

DONG Yu-cheng, CHEN Yi-hua

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Whether a compositive taxis vector gained by using average is reasonable and acceptable or not is a very important point in group decision. R^n room concept is adopted. A group of decisions are defined as a set in R^n room by abstract. A variable approximately describes the proportion of experts who are obviously dissident with compositive taxis vector. Finally an algorithm is designed for practical use. This algorithm can reduce dimension and be proved to be effective.

Key words: AHP; group decision; compositive taxis vector; acceptance; reduce dimension

(编辑 张 苹)