2004 年 6 月 重 庆 大 学 学 报 Jun. 2004
第 27 卷第 6 期 Journal of Chongqing University Vol.27 No.6

文章编号:1000-582X(2004)06-0099-03

集值映射拓扑度的延拓定理*

魏曙光,张 谋
(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:根据陈文原单值映射的拓扑度延拓,在 Banach 空间引入了一个关于 Hausdorff 度量的不等式。然后,利用此不等式,在 Banach 空间对于上半连续集值映射建立了拓扑度延拓的相关结论。

关键词:集值映射;拓扑度;Banach 空间;Hausdorff 度量
中图分类号:O177 **文献标识码**:A

1 预备知识

下面 X 总表示 Banach 空间,2^X 表 X 的非空子集族,CB(X)表(X,d)中一切非空有界闭集之全体。

$\forall M,N\in \mathrm{CB}(X)$,称由下式定义的度量 H 为 CB(X)上度量 d 导出的 Hausdorff 度量(见[1-5])

$$H(M,N)=\sup_{x\in X}|d(x,M)-d(x,N)|=$$
$$\max\{\sup_{x\in M}d(x,N),\sup_{x\in N}d(x,M)\}$$

其中 $d(x,M)=\inf_{y\in M}d(x,y)$

记$H_+(M,N)=\sup_{x\in X}(d(x,M)-d(x,N))=\sup_{x\in N}d(x,M)$

$$H_-(M,N)=\sup_{x\in X}(d(x,N)-d(x,M))=\sup_{x\in M}d(x,N)$$

2 Hausdorff 不等式

首先证明一个后面将不止一次用到的引理。

引理 设 X 为 Banach 空间,cc(X)表 X 的非空紧凸集,$\forall A,B,C\in cc(X)$,$\lambda\in[0,1]$有:

$$H(A,(1-\lambda)B+\lambda C)\leqslant (1-\lambda)H(A,B)+\lambda H(A,C)$$

证 由 Hausdorff 度量的定义:

$$H(A,B)=\max\{H_+(A,B),H_-(A,B)\}$$
$$d(x,A)=\inf_{y\in A}\|x-y\|$$

那么存在$\{y_n\}\subset A$,使得$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d(x,A)$,

由于 A 紧,所以$\{y_n\}$存在子序列$\{y_{n_k}\}$,使得:

$$y_{n_k}\to y_x\in A\quad n_k\to\infty$$

所以
$$\|x-y_x\|=d(x,A)\tag{1}$$

这里使式(1)成立的 y_x 有可能并不是唯一的,但这并不影响我们下面的证明。

由 Hausdorff 度量的定义

$$H_+(A,(1-\lambda)B+\lambda C)=\sup_{v\in(1-\lambda)B+\lambda C}d(v,A)$$

这里不妨令 $v=(1-\lambda)m+\lambda n$,其中 $m\in B,n\in C$,那么

$$H_+(A,(1-\lambda)B+\lambda C)=\sup_{\substack{m\in B\\ n\in C}}d((1-\lambda)m+\lambda n,A)=$$
$$\sup_{\substack{m\in B\\ n\in C}}\inf_{u\in A}\|(1-\lambda)m+\lambda n-u\|$$

由式(1)证明可知:

$$d(m,A)=\|m-y_m\|,d(n,A)=\|n-y_n\|$$

其中 $y_m\in A,y_n\in A$。由 A 凸,则有$(1-\lambda)y_m+\lambda y_n\in A$

$$H_+(A,(1-\lambda)B+\lambda C)=$$
$$\sup_{\substack{m\in B\\ n\in C}}\inf_{u\in A}\|(1-\lambda)m+\lambda n-u\|\leqslant$$
$$\sup_{\substack{m\in B\\ n\in C}}\|(1-\lambda)m+\lambda n-(1-\lambda)y_m-\lambda y_n\|=$$
$$\sup_{\substack{m\in B\\ n\in C}}\|(1-\lambda)(m-y_m)+\lambda(n-y_n)\|\leqslant$$
$$(1-\lambda)\sup_{m\in B}\|m-y_m\|+\lambda\sup_{n\in C}\|n-y_n\|=$$
$$(1-\lambda)\sup_{m\in B}d(m,A)+\lambda\sup_{n\in C}d(n,A)=$$
$$(1-\lambda)H_+(A,B)+\lambda H_+(A,C)$$

而另一方面:

$$H_-(A,(1-\lambda)B+\lambda C)=$$
$$\sup_{x\in A}d(x,(1-\lambda)B+\lambda C)=$$

---

* 收稿日期:2004-01-05
作者简介:魏曙光(1966-)男,重庆万州人,重庆大学博士研究生,讲师,主要从事非线性泛函研究。

$\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{\substack{m\in B\\ n\in C}}\|x-(1-\lambda)m-\lambda n\| \leqslant$

$\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{\substack{m\in B\\ n\in C}}[(1-\lambda)\|x-m\|+\lambda\|x-n\|]=$

$\sup\limits_{x\in A}[(1-\lambda)\inf\limits_{m\in B}\|x-m\|+\lambda\inf\limits_{n\in C}\|x-n\|]=$

$(1-\lambda)H_-(A,B)+\lambda H_-(A,C)$

所以 $H(A,(1-\lambda)B+\lambda C)\leqslant(1-\lambda)H(A,B)+\lambda H(A,C)$ 得证。

3 集值映射拓扑度的延拓

下面进行集值映射拓扑度的延拓,延拓的思路和方法类似于文献[1]中第 15 节拓扑度公理的思路和方法,所以下面只写出它们不同的地方以及主要定理的不同证明。

下面定义的拓扑度 $D(f,\Omega,P)$ 是关于有界开集 $\Omega\subset X$,上半连续、有界映象 $f:\overline{\Omega}\to2^X$ 及 $P\in X$ 的三变元整值函数。

Ω 的变化范围是 X 中开集族 ω。

映象 f 的变化范围/$M(\omega)$ 描述如下:

设 $\Omega\in\omega$,ω 为 X 中所有有界开集族,如果 $\Omega=\phi$,则令 $C(\overline{\Omega},2^X)=\phi$ 如果 $\Omega\neq\phi$,则令 $C(\overline{\Omega},2^X)$ 为所有上半连续[6]、有界映象 $f:\overline{\Omega}\to2^X$ 按一致拓扑构成的拓扑空间,具体地说,$f\in C(\overline{\Omega},2^X)$ 的邻域:

$$N_\varepsilon(f)=\{g\in c(\overline{\Omega},2^X)\mid\sup_{x\in\Omega}H(f(x),g(x))<\varepsilon\}$$

对每个 $\Omega\in\omega$,取 $C(\overline{\Omega},2^X)$ 的子集族 $M(\Omega)$,满足

(M_1) 对任何 $\Omega\in\omega/\{\phi\}$,$\mathrm{id}:\Omega\to2^X$ 属于 $M(\Omega)$

(M_2),设 $\Omega_1,\Omega\in\omega$,且 $\Omega_1\subset\Omega$,若 $f\in M(\Omega)$,则 f 在 $\overline{\Omega_1}$ 上的局限必属于 $M(\Omega_1)$

(M_3) $f\in M(\Omega)$,$p\in X$,$g(x)=f(x)-p$,则 $g\in M(\Omega)$

p 的变化范围为 $p\notin\overline{f(\partial\Omega)}$

$$M_p(\Omega)=\{f\in M(\Omega)\mid p\notin\overline{f(\partial\Omega)}\}$$

结论 1 $M_p(\Omega)$ 是 $M(\Omega)$ 中的开集。

证 设 $f\in M_p(\Omega)$,即 $p\notin\overline{f(\partial\Omega)}$,由 $\{p\}$ 紧及 $\overline{f(\partial\Omega)}$ 闭,故它们有正距离或 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}d(p,f(x))\geqslant2\varepsilon>0$,作 f 的邻域:

$$N_\varepsilon(f)=\{g\in M(\Omega)\mid\sup_{x\in\Omega}H(f(x),g(x))<\varepsilon\}$$

由 Hausdorff 度量的定义

$H(A,B)=\sup\limits_{y\in X}|d(y,A)-d(y,B)|$,又 $p\in X$,所以

$H(f(x),g(x))\geqslant d(p,f(x))-d(p,g(x))$

$d(p,g(x))\geqslant d(p,f(x))-H(f(x),g(x))$

$$\inf_{x\in\partial\Omega}d(p,g(x))\geqslant\inf_{x\in\partial\Omega}d(p,f(x))-\sup_{x\in\Omega}H(f(x,)g(x))>\varepsilon>0$$

$$p\notin\overline{g(\partial\Omega)}\qquad g\in M_p(\Omega)$$

所以 $M_p(\Omega)$ 是 $M(\Omega)$ 中的开集。

结论 2 若 $\Omega\in\omega/\{\phi\}$,$f\in M_p(\Omega)$ 具有性质$(H)f$ 在 $M(\Omega)$ 中有凸邻域 N,则存在 f 在 $M_p(\Omega)$ 中邻域 U,当 $g\in U$ 时,线性同伦 $l:[0,1]\to M_p(\Omega)$ 连续。

证 由 $f\in M_p(\Omega)$ 知:$2\varepsilon=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}d(p,f(x))>0$

取 f 的邻域:

$$N_\varepsilon(f)=\{g\in M(\Omega)\mid\sup_{x\in\Omega}H(f(x),g(x))<\varepsilon\}$$

令 $U=N\cap N_\varepsilon(f)$,当 $g\in U$ 时作:$l(t)=(1-t)f+tg,t\in[0,1]$

由 $f,g\in N$ 及 N 凸得 $l(t)\in N\subset M(\Omega)$

由 $g\in N_\varepsilon(f)$ 以及 $d(p,l(t)x)\geqslant d(p,f(x))-H(f(x),l(t)x)$

由前面证明的引理有:

$H(f(x),l(t)x)\leqslant$

$(1-t)H(f(x),f(x))+tH(f(x),g(x))=$

$tH(f(x),g(x))$

所以 $d(p,l(t)x)\geqslant d(p,f(x))-tH(f(x),g(x))>\varepsilon>0$,可得

$$l(t)\in M_p(\Omega)$$

下面考虑 $H(l(t_1)x,l(t_2)x)$,

由 $H_+(l(t_1)x,l(t_2)x)=\sup\limits_{v\in l(t_2)x}\inf\limits_{u\in l(t_1)x}\|v-u\|$

$v=(1-t_2)m+t_2n,m\in f(x),n\in g(x)$

$u=(1-t_1)k+t_1l,k\in f(x),l\in g(x)$

$\|v-u\|=\|m-k-t_2m+t_1k+t_2n-t_1l\|=$

$\|m-k-t_1m+t_1k-t_2m+t_2n+t_1m-t_1l\|=$

$\|(1-t_1)(m-k)-t_2m+t_2l+$

$t_2n-t_2l+t_1(m-l)\|=$

$\|(1-t_1)(m-k)+(t_1-t_2)(m-l)+t_2(n-l)\|\leqslant$

$(1-t_1)\|m-k\|+t_1\|n-l\|+|t_1-t_1|\ \|m-n\|$

所以

$\inf\limits_{u\in l(t_1)x}\|v-u\|\leqslant\inf\limits_{\substack{K\in f(x)\\ l\in g(x)}}\{(1-t_1)\|(m-k)\|+$

$t_1\|n-l\|+|t_1-t_2|\ \|m-n\|\}=$

$\inf\limits_{k\in f(x)}(1-t_1)\|m-k\|+$

$\inf\limits_{l\in g(x)}t_1\|n-l\|+|t_1-t_2|\ \|m-n\|=$

$|t_1-t_2|\ \|m-n\|$

所以

$$\sup_{v\in l(t_2)x}\inf_{u\in l(t_1)x}\|v-u\|\leqslant\sup_{\substack{m\in f(x)\\ n\in g(x)}}|t_1-t_2|\ \|m-n\|=|t_1-t_2|\sup_{\substack{m\in f(x)\\ n\in g(x)}}\|m-n\|$$

所以 $H_+(l(t_1)x,l(t_2)x)\leqslant|t_1-t_2|\sup\limits_{\substack{m\in f(x)\\ n\in g(x)}}\|m-n\|$

同理可证：

$$H_-(l(t_1)x, l(t_2)x) \leqslant |t_1 - t_2| \sup_{\substack{k \in f(x) \\ l \in g(x)}} \| k - l \|$$

所以 $H(l(t_1)x, l(t_2)x) \leqslant |t_1 - t_2| \sup_{\substack{m \in f(x) \\ n \in g(x)}} \| m - n \|$

因为 $f(x)$，$g(x)$ 紧凸，当然有界闭，所以

$$\sup_{\substack{m \in f(x) \\ n \in g(x)}} \| m - n \| < +\infty$$

所以 $l:[0,1] \to M_p(\Omega)$ 连续

ω 为 X 中有界开集族，考察两个允许映象族

$$/M(\omega) = \{M(\Omega) \mid \Omega \in \omega\}$$

$$/L(\omega) = \{L(\Omega) \mid \Omega \in \omega\}$$

设对每 $\Omega \in \omega$ 都有 $L(\Omega) \subset M(\Omega)$

讨论如下两个问题：

第一，$/L(\omega)$ 上的拓扑度能否延拓为 $/M(\omega)$ 上的拓扑度。

第二，$/M(\omega)$ 上的拓扑度能否由 $/L(\omega)$ 上的拓扑度唯一决定。

结论 3　设 X、ω、$/M(\omega)$、$/L(\omega)$ 给定，设对每 $\Omega \in \omega / \{\phi\}$，$L(\Omega)$ 均为凸集，若 $D(.,.,.)$ 为 $/L(\omega)$ 上拓扑度，则对任何 $f \in M_p(\Omega)$，有 f 在 $M(\Omega)$ 中邻域 N，使得 $g, g_1 \in N \cap L_P(\Omega)$ 时，都有：$D(g,\Omega,p) = D(g_1,\Omega,p)$

证　由 $f \in M_p(\Omega)$ 知 $p \notin \overline{f(\partial\Omega)}$，故有 $\varepsilon > 0$，使得 $\inf\limits_{x \in \partial\Omega} d(p, f(x)) > 3\varepsilon$：

取 f 的邻域：

$$N = \{g \in M(\Omega) \mid \sup_{x \in \bar{\Omega}} H(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$$

对 $g, g_1 \in N \cap L_P(\Omega)$，作 $l(t) = (1-t)g + tg_1$

由 $L(\Omega)$ 凸得 $l(t) \in L(\Omega)$

由 $d(p, l(t)x) \geqslant d(p, f(x)) - H(f(x), l(t)x)$

由引理有：

$$H(f(x), l(t)x) \leqslant (1-t)H(f(x), g(x)) + tH(f(x), g_1(x))$$

所以 $d(p, l(t)x) \geqslant d(p, f(x)) - H(f(x), l(t)x) \geqslant d(p, f(x)) - (1-t)H(f(x), g(x)) - tH(f(x), g_1(x)) > \varepsilon > 0$

所以 $p \notin \overline{l(t)(\partial\Omega)}$，$l(t) \in L_P(\Omega)$ 由

由 $H(l(t_1)x, l(t_2)x) \leqslant |t_1 - t_2| \sup_{\substack{v \in g(x) \\ u \in g_1(x)}} \| v - u \|$

又 $g(x)$，$g_1(x)$ 紧凸，当然有界，所以

$$\sup_{\substack{v \in g(x) \\ u \in g_1(x)}} \| v - u \| < +\infty$$

所以 $l:[0,1] \to L_P(\Omega)$ 连续。

由 $/L(\omega)$ 上拓扑度公理得：

$D(g,\Omega,p) = D(g_1,\Omega,p)$ 得证

由以上几个定理就可得到集值映射的两个拓扑度延拓定理以及唯一性定理（参见文献[6]中定理 15.10，15.11，15.12）。

参考文献：

[1]　郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科技出版社，1985.

[2]　张石生. 不动点原理及其应用[M]. 重庆：重庆出版社，1985

[3]　PETRYSHYN W V. Existence of fixed points of positive K-set-contractive maps as consequences of suitable boundary conditions [J]. J London Math Soc, 1988, 38 (2): 503 - 512.

[4]　CELLINA A. Approximation of set-valued functions and fixed point theorems[J]. Ann Mat Pura Appl, 1969, 82, 17 - 24.

[5]　朱继生. 集值映射的连续性[J]. 数学年刊，1984，5A(6)：733 - 737.

[6]　陈文原. 非线性泛函分析[M]兰州：甘肃人民出版社，1982.

Extensive Theorms of Topolgical Degree for Multi-valucd Mapping

WEI Shu-guang, ZHANG Mou

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: The extension of topological degree for single-valued mapping is introduced by Chen wenyuan in [1]. We firstly prove an inequality for Hausdorff metric in Banach space. Then, by using the inequality, it has been established that extension of topolical degree for upper semicontinuous multi-valued mapping.

Key words: mupli-valued mapping; topological degree; Banach space; Hausdorff metric

（编辑　张　苹）